71.0.2

J. 5519

SESSION DE 1995

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse

Durée : 6 heures

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5.
L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.
La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIFS

On note $\mathbf{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On désigne par U un ouvert *connexe* de $\mathbf{K}$, et par $D(a, R)$ le disque ouvert de centre a et de rayon R. On convient de poser $D(a, +\infty) = \mathbf{K}$.

Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, U n'est autre qu'un intervalle ouvert et $D(a, R)$ est l'intervalle ouvert $]a - R, a + R[$: on note alors $\mathcal{C}^p(U)$ l'ensemble des applications de U dans $\mathbb{C}$, p fois continument dérivables (p étant un entier au moins égal à 1).

Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, on note $\mathcal{H}(U) = \mathcal{C}^1(U)$ l'ensemble des applications holomorphes de U dans $\mathbb{C}$.

Concernant une fonction f holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, on dispose des résultats suivants *que l'on ne demande pas de démontrer :*

A) Si l'ouvert U est *convexe*, et si a appartient à U, f admet une primitive F et une seule sur U telle que $F(a) = 0$.

B) La fonction f est est indéfiniment dérivable sur U. En outre, pour tout point a de U, en notant R le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a, on a :

- si $U = \mathbb{C}$ alors $R = +\infty$,
- si $U \neq \mathbb{C}$ alors R est égal à la distance de a au complémentaire de U,

dans les deux cas la somme de la série de Taylor de f au point a est égale à f sur $D(a, R)$.

En particulier, pour tout entier $p > 1$, on a $\mathcal{C}^p(U) = \mathcal{C}^1(U)$.

C) Si l'ensemble des zéros de f possède au moins un point d'accumulation dans U, alors f est nulle sur U.

Considérons à nouveau le cas général ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle *point critique* d'un élément f de $\mathcal{C}^1(U)$ tout zéro de f'.

On note $C(f) = \{x \in U \mid f'(x) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de f.

Etant donnés f appartenant à $\mathcal{C}^p(U)$, avec $p \geqslant 3$, et x un point non critique de f, le *schwarzien* de f au point x est défini par

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 .$$

Etant donnés a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$, lorsque U est inclus dans $\mathbf{K} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, on définit une *homographie* h sur U par $h(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

Dans la partie I on étudie le lien entre le schwarzien et les homographies.
Dans la partie II on étudie le lien entre le schwarzien et le birapport.
Dans la partie III on étudie les fonctions univalentes sur le disque-unité de $\mathbb{C}$.
Dans la partie IV on étudie l'injectivité des arcs plans au moyen du schwarzien.
Dans la partie V on utilise le schwarzien pour caractériser les fonctions univalentes.

Les parties II et III sont indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

Partie I : SCHWARZIEN ET HOMOGRAPHIES

1°) Soient U un ouvert connexe de $\mathbf{K}$ et f un élément de $\mathcal{C}^3(U)$, V un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et g un élément de $\mathcal{H}(V)$, et soit x un point de U non critique pour f, tel que $f(x)$ appartienne à V et ne soit pas critique pour g. Les hypothèses formulées sur x peuvent s'écrire aussi :

$$x \in U \setminus C(f) \qquad \text{et} \qquad f(x) \in V \setminus C(g).$$

a] Montrer que x n'est pas un point critique pour $g \circ f$.

b] Exprimer $S_{g \circ f}(x)$ en fonction de $S_g(f(x))$, $S_f(x)$ et $f'(x)$.

2°) Soient a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et h l'homographie définie sur $\mathbf{K} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ par $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

a] Calculer $S_h(x)$ pour tout $x \neq -\frac{d}{c}$.

b] Soit une fonction f appartenant à $\mathcal{C}^3(U)$. Calculer $S_{h \circ f}(x)$ pour tout point x de $U \setminus C(f)$ tel que $f(x) \neq -\frac{d}{c}$.

c] On suppose dans cette question que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Calculer $S_{f \circ h}(x)$ pour tout élément x de $\mathbf{K}$ différent de $-\frac{d}{c}$ et tel que $h(x)$ appartienne à $U \setminus C(f)$.

3°)

a] On suppose dans cette question que U est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Soit f appartenant à $\mathcal{C}^2(U)$ et ne s'annulant pas sur U. Montrer qu'il existe φ appartenant à $\mathcal{C}^2(U)$ telle que pour tout x de U on ait $f(x) = \exp(\varphi(x))$ (on considérera une primitive de $\dfrac{f'}{f}$).

b] On suppose dans cette question que U est un disque ouvert $D(z_0, R)$ de $\mathbf{C}$. Soit une fonction f appartenant à $\mathcal{C}^1(U)$ et ne s'annulant pas sur U. Montrer qu'il existe φ appartenant à $\mathcal{C}^1(U)$ telle que pour tout élément z de U on ait $f(z) = \exp(\varphi(z))$.

c] En déduire, dans chacune des deux situations envisagées en 3°a et 3°b, l'existence de ψ appartenant à $\mathcal{C}^2(U)$ telle que $f = \psi^2$.

4°) Dans la suite de cette partie on suppose que U est un ouvert connexe de $\mathbf{K}$ et on considère une fonction f appartenant à $\mathcal{C}^3(U)$.

a] Montrer que $U \setminus C(f)$ est un ouvert de $\mathbf{K}$.

b] Soit un disque ouvert $D \subset U \setminus C(f)$. Montrer qu'il existe une application g appartenant à $\mathcal{C}^2(D)$ telle que l'on ait $g(z)^2 f'(z) = 1$ pour tout élément z de D.

c] Montrer que l'on a $S_f(z) = \dfrac{-2g''(z)}{g(z)}$ pour tout z appartenant à D.

5°) On suppose dans cette question que S_f est nulle sur $U \setminus C(f)$.

a] Soit un disque ouvert $D \subset U \setminus C(f)$. Montrer que la restriction de f à D est une homographie.

b] En déduire que $C(f)$ est vide et que f est une homographie sur U.

6°) Soient des nombres complexes λ et ω tels que $\lambda = -2\omega^2$.

a] On suppose que $S_f(x) = \lambda$ pour tout x appartenant à $U \setminus C(f)$. Soit un disque ouvert $D \subset U \setminus C(f)$. Montrer que si le diamètre de D est assez petit, alors il existe une homographie h telle que l'on ait $f(x) = h(e^{2\omega x})$ pour tout élément x de D.

b] Montrer que S_f est constante et égale à λ sur $U \setminus C(f)$ si, et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) L'ensemble $C(f)$ est vide ;

(ii) il existe une homographie h telle que l'on ait $f(x) = h(e^{2\omega x})$ pour tout élément x de U.

c] *Applications.* Calculer S_f lorsque $U = \mathbf{R}$ et $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$, et lorsque $U =]-1, 1[$ et $f(x) = \mathrm{Argth}\, x$.

Partie II : SCHWARZIEN ET BIRAPPORT

Dans cette partie on met en évidence un lien entre schwarzien et birapport. On rappelle que le *birapport* de quatre nombres complexes a, b, c, d deux à deux distincts est défini comme

$$[a,b,c,d] = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}\,.$$

On considère un ouvert U de $\mathbf{K}$ et un élément f de $C^3(U)$. Etant donnés a, b, c, d quatre points deux à deux distincts de U, tels que $f(a), f(b), f(c), f(d)$ soient deux à deux distincts, on définit

$$R_f(a,b,c,d) = \frac{[f(a), f(b), f(c), f(d)]}{[a,b,c,d]}\,.$$

1°) On considère un point x_0 appartenant à $U \setminus C(f)$.

a] Montrer qu'il existe une homographie h unique, définie sur un voisinage de x_0, et telle que l'on ait $h(x_0) = f(x_0)$, $h'(x_0) = f'(x_0)$, $h''(x_0) = f''(x_0)$.

b] Exprimer $(f-h)^{(3)}(x_0)$ en fonction de $f'(x_0)$ et de $S_f(x_0)$.

c] On pose $g = h^{-1} \circ f$. Exprimer $g'(x_0)$, $g''(x_0)$, $g^{(3)}(x_0)$ en fonction de $f'(x_0)$ et de $S_f(x_0)$.

2°)

a] Soit h une homographie. Comparer $R_{h \circ f}(a,b,c,d)$ et $R_f(a,b,c,d)$ lorsque ces nombres sont définis.

b] Soient $a(t), b(t), c(t), d(t)$ quatre fonctions définies et de classe C^3 sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. On suppose que $a(0) = b(0) = c(0) = d(0) = z \in U \setminus C(f)$ et que $a'(0), b'(0), c'(0), d'(0)$ sont deux à deux distincts. Montrer que $R_f(a(t), b(t), c(t), d(t))$ est bien défini pour t non nul et assez proche de 0, et tend vers 1 lorsque t tend vers 0.

X **c]** Montrer que l'on a

$$R_f(a(t), b(t), c(t), d(t)) = 1 + \frac{1}{6}\big(a(t) - b(t)\big)\big(c(t) - d(t)\big) S_f(z) + o\left(t^2\right)\,.$$

3°) Dans la suite de cette partie on suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. On considère une fonction f appartenant à $C^3(U)$, à valeurs réelles, et n'ayant qu'un nombre *fini* de points critiques.

On dit que f possède :

- la propriété $\mathcal{R}$ sur U si pour tous éléments x_1, x_2, x_3, x_4 de U tels que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ et que f n'ait aucun point critique dans $[x_1, x_4]$ on a
$$R_f(x_1, x_2, x_3, x_4) < 1\,,$$
- la propriété $\mathcal{S}$ sur U si S_f est strictement négative sur $U \setminus C(f)$.

On étudie, dans cette question, la stabilité des propriétés $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ par composition.

a] Soit deux fonctions f et g, telles que f ait la propriété $\mathcal{R}$ sur U et g ait la propriété $\mathcal{R}$ sur U', avec $f(U) \subset U'$. Montrer que $g \circ f$ a la propriété $\mathcal{R}$ sur U.

b] Soit deux fonctions p et q, telles que p ait la propriété $\mathcal{S}$ sur U et q ait la propriété $\mathcal{S}$ sur U', avec $p(U) \subset U'$. Montrer que $q \circ p$ a la propriété $\mathcal{S}$ sur U.

4°) On se propose, dans les questions 4° et 5°, de montrer que les propriétés $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont équivalentes.

On suppose, dans cette question, que f a la propriété $\mathcal{R}$ sur U.

a] Montrer que l'on a $S_f(x) \leqslant 0$ pour tout x appartenant à $U \setminus C(f)$.

b] Montrer que l'on a $C(f) = C(f + \varepsilon f^3)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Calculer $S_{f+\varepsilon f^3}$.

X **c]** En déduire que f a la propriété $\mathcal{S}$.

5°) Soit f ayant la propriété $\mathcal{S}$. On pose, pour tout x appartenant à $U \setminus C(f)$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|f'(x)|}}$.

a] Exprimer $g''(x)$ en fonction de $g(x)$ et de $S_f(x)$.

b] Montrer que $|f'|$ ne peut présenter de minimum local en un point de $U \setminus C(f)$.

c] Soient x_1, x_2, x_3, x_4 des points de U tels que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, et que f n'ait pas de point critique dans $[x_1, x_4]$. On suppose aussi que l'on a $R_f(x_1, x_2, x_3, x_4) \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une homographie h, telle que l'on ait $h(f(x_k)) = x_k$ pour $k = 1, 2, 4$. Montrer que le pôle de h n'appartient pas à $f([x_1, x_4])$.

d] Dans les conditions de la question précédente, on pose $g = h \circ f$. Montrer l'inégalité $g(x_3) \leqslant x_3$.

e] Conclure.

6°) On suppose enfin que f est une fonction polynômiale à coefficients réels, telle que le polynôme f' ait toutes ses racines réelles. Montrer que f a la propriété $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Partie III : FONCTIONS UNIVALENTES

Dans cette partie on prend $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

On dit qu'une fonction holomorphe sur U est *univalente* si elle est injective sur U.

On dit qu'une fonction f holomorphe sur U est *localement univalente* si, pour tout point z_0 de U, il existe un disque ouvert D de centre z_0 et inclus dans U tel que la restriction de f à D soit univalente.

On note

C_r le cercle de centre 0 et de rayon r,

D_r le disque ouvert de centre 0 et de rayon r.

1°)

a] Déterminer les images de C_1 et D_1 par l'homographie $\Psi(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

b] Soient a appartenant à D_1 et γ appartenant à C_1. On note $\Phi_{a,\gamma}$ l'homographie définie sur $\mathbf{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\}$ par

$$\Phi_{a,\gamma}(z) = \gamma \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Montrer que $\Phi_{a,\gamma}$ induit une bijection de D_1 sur lui-même.

c] Soit h une homographie définie sur D_1 qui induit une bijection de D_1 sur lui-même. Montrer qu'il existe un élément (a, γ) et un seul de $D_1 \times C_1$ tel que l'on ait $h = \Phi_{a,\gamma}$.

d] On considère encore $h = \Phi_{a,\gamma}$. Exprimer, pour tout point z de D_1, $|h'(z)|^2$ en fonction de $|h(z)|^2$ et de $|z|^2$.

2°) Dans cette question on étudie un exemple de fonction univalente sur D_1.

On pose $k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ pour tout élément z de D_1.

a] Exprimer $k(z)$ en fonction de $\Psi(z)$.

b] En déduire que k est univalente sur D_1 et déterminer l'image de D_1 par k.

3°) Soit f appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Dans cette question on identifie U à un ouvert de $\mathbf{R}^2$ en identifiant un nombre complexe $z = x + iy$ au point (x, y) de $\mathbf{R}^2$. On considère les fonctions P, Q, F définies pour tout (x, y) de U par

$$P(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy)) \qquad Q(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy)) \qquad F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

a] Soit un point $z = x + iy$ de U. Démontrer que le jacobien de F au point (x, y) est égal à $|f'(z)|^2$.

b] On suppose que f n'a pas de point critique. Montrer qu'elle est localement univalente.

c] On suppose encore f n'a pas de point critique. Montrer que pour tout ouvert V inclus dans U l'image de V par f est un ouvert de $\mathbf{C}$.

4°) Soit une fonction f holomorphe sur U, non constante et possédant un point critique z_0.

a] Montrer qu'il existe un voisinage ouvert D de z_0, un nombre entier $p \geqslant 2$, un nombre complexe μ non nul et une fonction g appartenant à $\mathcal{H}(D)$ tels que $g'(z_0) = 1$ et $f(z) = f(z_0) + \mu(g(z))^p$ pour tout point z de D.

b] En déduire que f n'est pas localement univalente.

Tournez la page S.V.P.

Partie IV : SCHWARZIEN ET ARCS SIMPLES

Dans cette partie on prend $\mathbf{K} = \mathbb{R}$.

On considère une fonction f de $C^3(U)$ ne possédant pas de point critique.

On note F l'application de U dans $\mathbb{R}^2$ définie par $F(t) = (\mathrm{Re}(f(t)), \mathrm{Im}(f(t)))$. Cette application définit un arc paramétré plan ; dans cette partie on met en évidence diverses conditions suffisantes pour que cet arc soit *simple*, c'est-à-dire injectif.

On pose

$$\kappa(t) = \frac{\mathrm{Im}\left(\overline{f'(t)}f''(t)\right)}{|f'(t)|^3}.$$

1°) Démontrer que si $\kappa(t) \neq 0$ alors $\frac{1}{\kappa(t)}$ est égal au rayon de courbure de l'arc paramétré défini par F.

2°) Calculer $\kappa'(t)$ en fonction de $\mathrm{Im}\, S_f(t)$ et $|f'(t)|$.

3°) Caractériser l'image de F si S_f ne prend que des valeurs réelles.

4°) Soit p une fonction continue sur U, à valeurs complexes, et u appartenant à $C^2(U)$ telle que $u'' + pu = 0$.

a] Soit θ un nombre réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. On suppose, dans cette question, que l'on a $\mathrm{Re}(e^{i\theta}p(t)) \leqslant 0$ pour tout t appartenant à U. Montrer que si u s'annule en deux points distincts de U, alors elle est nulle en tout point (on pourra intégrer la fonction $\bar{u}u''$).

b] On suppose, dans cette question, que $\mathrm{Im}\, p(t)$ ne s'annule pas. Montrer que si u s'annule en deux points distincts de U, alors elle est nulle en tout point.

5°)

a] On suppose, dans cette question, qu'il existe θ appartenant à $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ tel que l'on ait $\mathrm{Re}(e^{i\theta}S_f) \leqslant 0$ sur U. Montrer que f est injective.

Indication : en supposant d'abord que f s'annule en deux points distincts a et b, on construira u appartenant à $C^2(U)$, telle que $u^2 f' = f^2$.

b] On suppose, dans cette question, que l'on a $\mathrm{Im}(S_f) < 0$ sur U. Montrer que f est injective.

6°) On suppose, dans cette question, que $U =]-1, 1[$. Soit θ appartenant à $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ et δ un nombre réel strictement positif. On suppose que pour tout t de U

$$\mathrm{Re}(e^{i\theta}S_f(t)) \leqslant \frac{2(1+\delta^2)\cos\theta}{(1-t^2)^2}.$$

Montrer que la restriction de f à $]-\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2\delta}, \mathrm{th}\,\frac{\pi}{2\delta}[$ est injective.

Indication : on pourra introduire $\varphi(x) = \mathrm{th}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\, x}{\delta}\right)$ et utiliser la question I6°c.

Partie V : SCHWARZIEN ET UNIVALENCE

Dans cette partie on prend $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On note

S l'ensemble des fonctions univalentes sur D_1.

S_1 l'ensemble des fonctions f univalentes sur $D_1 \setminus \{0\}$, et telles que $\lim\limits_{z \to 0} zf(z) = 1$.

1°) Soit une fonction f holomorphe dans D_1, n'ayant pas de point critique. On suppose qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que l'on ait $|S_f(z)| \leqslant \dfrac{2(1+\delta^2)}{(1-|z|^2)^2}$ pour tout point z de D_1. On se propose de déterminer des disques ouverts où f est univalente. Soient z_1 et z_2 deux points distincts de D_1.

a] Montrer que $\left| \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right| \leqslant \dfrac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1 z_2|}$.

b] Montrer qu'il existe un point a de D_1 et un point γ de C_1 tels que $\Phi_{a,\gamma}(z_1) = 0$ et que $t = \Phi_{a,\gamma}(z_2)$ soit un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

c] On conserve les notations de la question précédente, et on pose $s = \frac{1}{2} \operatorname{Argth} t$; on considère l'homographie $h = \Phi_{\operatorname{th} s, 1} \circ \Phi_{a,\gamma}$. Calculer $h(z_1)$ et $h(z_2)$; en supposant, de plus, que z_1 et z_2 appartiennent au disque $D_{\operatorname{th} \frac{\pi}{2\delta}}$, montrer que $s < \frac{\pi}{2\delta}$.

d] Montrer que f est univalente sur le disque $D_{\operatorname{th} \frac{\pi}{2\delta}}$.

e] Etudier le cas où $\delta = 0$.

f] Pour tout z de D_1 on pose

$$F(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{i\delta} = \exp(i\delta \ln \Psi(z))$$

(Ψ a été vue au III1°a). Montrer que F est holomorphe dans D_1, calculer le schwarzien S_F, et vérifier que F est univalente sur le disque ouvert D_r si et seulement si $r \leqslant \operatorname{th} \frac{\pi}{2\delta}$.

2°) On considère, dans cette question, une fonction g appartenant à S_1.

a] Montrer que le développement de g en série de Laurent est de la forme $g(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ est au moins égal à 1.

b] Soit F appartenant à S, telle que $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$. Montrer que $g = \frac{1}{F}$ appartient à S_1. En écrivant le développement de g sous la forme indiquée à la question précédente, calculer b_1 en fonction de $S_F(0)$.

c] On introduit, pour tout r appartenant à $]0, 1[$, les ensembles

$\Gamma_r = \{g(z) \ / \ |z| = r\} = g(C_r)$.

$E_r = \{g(z) \ / \ r < |z| < 1\}$.

$E'_r = \{g(z) \ / \ 0 < |z| < r\} = g(D_r \setminus \{0\})$.

On note Δ le complémentaire dans $\mathbf{C}$ de l'image de g.

Montrer que E_r est ouvert et que Δ est fermé.

Montrer que E'_r contient le complémentaire d'un disque ; en déduire que $E_r \cup \Delta$ est borné.

Montrer que la frontière de $E_r \cup \Delta$ est Γ_r.

d] Calculer $\int_{C_r} g(z)\overline{g'(z)}\,dz$, le cercle C_r étant parcouru dans le sens direct.

e] On note $v(r)$ l'aire de l'ensemble $E_r \cup \Delta$. Justifier l'existence de $v(r)$.

f] *On admettra, selon le théorème de Green-Riemann appliqué à $E_r \cup \Delta$ et à sa frontière Γ_r, que $v(r)$ peut se calculer à l'aide d'une intégrale curviligne le long de Γ_r suivant la formule*

$$v(r) = \left|\frac{1}{2}\int_{\Gamma_r}(x\,dy - y\,dx)\right| .$$

Montrer que $v(r) = \varepsilon(r)w(r)$, avec $\varepsilon(r) = \pm 1$ et $w(r) = \pi\left(r^{-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n}\right)$.

g] Etudier le signe de $w(r)$ et en déduire que $\varepsilon(r) = 1$ pour tout r.

h] Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1$.

3°)

a] Soit f appartenant à S et a appartenant à D_1 . On pose

$$g(z) = \frac{(1-|a|^2)f'(a)}{f\left(\dfrac{z+a}{\bar{a}z+1}\right) - f(a)} .$$

Montrer que g est bien définie sur $D_1 \setminus \{0\}$ et qu'elle appartient à S_1.

b] On développe g en série de Laurent, sous la forme $g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Exprimer b_1 en fonction de a et $S_f(a)$.

c] En déduire que l'on a $|S_f(z)| \leqslant \dfrac{6}{(1-|z|^2)^2}$ pour tout z de D_1 .

Comparer ce résultat avec celui de la question 1°d de cette partie.