Agrégation Externe 1997 . Epreuve d'analyse

corrigé par J.C.Feauveau

I – Première partie

1. Soit $P \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$. L'application $x \to \Gamma(P)(x)$ est un élément de $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$, à valeurs dans l'espace des matrices symétriques.
   Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $h = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$. Il vient :

$$^t h\Gamma(P)(x)h = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} h_i h_j \langle \frac{\partial P}{\partial x_i}(x), \frac{\partial P}{\partial x_j}(x) \rangle = \Big|\Big| \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial P}{\partial x_i}(x) h_i \Big|\Big|^2.$$

   Il en résulte que $\Gamma(P)$ est une métrique si et seulement si pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^d)^2$, $h \neq 0$, on a $dP(x)(h) \neq 0$. Ce qui est équivalent à l'injectivité de $dP(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

   Pour que $\Gamma(P)$ soit une métrique, il est donc nécessaire d'avoir $N \geqslant d$. Supposons possible le cas $N = d$ et notons $P = (P_1, \ldots, P_n)$ les fonctions coordonnées de P.
   L'application P_1 appartient à $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}^d$ en lequel P_1 atteint son maximum. On en déduit $dP_1(x_0) = 0$ et la non inversibilité de $\Gamma(P)(x_0)$, ce qui contredit l'hypothèse.

2. Le choix $a = \sqrt{g}$ s'impose naturellement. Il reste à trouver M de sorte que P soit 2π-périodique. Le plus simple est :

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(y)dy.$$

3. (a) Soit $P : (x_1, x_2) \to (sin(x_1), cos(x_1), sin(x_2), cos(x_2))$. Il est clair que $P \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\Gamma(P)(x) = I$.

   (b) Soit P une représentation de G en dimension 3 et $x \in \mathbb{R}^2$. Des égalités

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial P}{\partial x_1}(x), \frac{\partial P}{\partial x_1}(x) \rangle & = & 1 \\ \langle \frac{\partial P}{\partial x_1}(x), \frac{\partial P}{\partial x_2}(x) \rangle & = & 0 \\ \langle \frac{\partial P}{\partial x_2}(x), \frac{\partial P}{\partial x_2}(x) \rangle & = & 1 \end{cases}$$

   on déduit que la famille $\Big(\frac{\partial P}{\partial x_1}(x), \frac{\partial P}{\partial x_2}(x)\Big)$ est orthonormale et se complète par $N(x)$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Par différentiation des égalités, on trouve que $\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$, $\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(x)$ et $\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(x)$ sont orthogonaux au plan engendré par $\Big(\frac{\partial P}{\partial x_1}(x), \frac{\partial P}{\partial x_2}(x)\Big)$.
   Il existe donc trois applications b, a_1 et a_2 (nécessairement dans $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$) telles que :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = bN, \ \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1} = a_1 N \text{ et} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2} = a_2 N.$$

Par différentiation de $N(x) = \frac{\partial P}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial P}{\partial x_2}(x)$, et avec la formule du double produit vectoriel, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x_1}(x) &= -a_1 \frac{\partial P}{\partial x_1}(x) - b\frac{\partial P}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial N}{\partial x_2}(x) &= -b\frac{\partial P}{\partial x_1}(x) - a_2\frac{\partial P}{\partial x_2}(x). \end{cases}$$

(c) Il vient successivement

$$\frac{\partial^3 P}{\partial^2 x_1 \partial x_2} = \frac{\partial bN}{\partial x_1} = \frac{\partial b}{\partial x_1}N + b\frac{\partial N}{\partial x_1}$$

et

$$\frac{\partial^3 P}{\partial^2 x_1 \partial x_2} = \frac{\partial a_1 N}{\partial x_2} = \frac{\partial a_1}{\partial x_2}N + a_1\frac{\partial N}{\partial x_2}.$$

Pour tout x, la famille $\Big(\frac{\partial P}{\partial x_1}(x), \frac{\partial P}{\partial x_2}(x), N(x)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit donc

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial b}{\partial x_1} \text{ et } b^2 = a_1 a_2.$$

(d) P étant périodique, la fonction $\phi : x \to \langle P(x), P(x)\rangle$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}^2$ en un point du compact $[0, 2\pi]^2$. En un tel point y, on a donc $\langle\frac{\partial P}{\partial x_1}(y), P(y)\rangle = \langle\frac{\partial P}{\partial x_2}(y), P(y)\rangle = 0$ et il en résulte $P(y) = \lambda N(y)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
La matrice $A = \lambda \begin{pmatrix} a_1(y) & b(y) \\ b(y) & a_2(y) \end{pmatrix}$ est de déterminant nul et donc la forme quadratique associée est dégénérée.
On développe alors ϕ à l'ordre 2 au voisinage de y :
$\phi(y_1 + h_1, y_2 + h_2) =$

$$\Big|\Big|P(y) + \frac{\partial P}{\partial x_1}(y)h_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2}(y)h_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}(y)h_1h_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)h_2^2 + o(||h||^2)\Big|\Big|^2$$

$$= \phi(y) + \Big|\Big|\frac{\partial P}{\partial x_1}\Big|\Big|^2 h_1^2 + \Big|\Big|\frac{\partial P}{\partial x_2}\Big|\Big|^2 h_2^2 +$$

$$2\langle\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}(y)h_1h_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)h_2^2, P\rangle + o(||h||^2).$$

Or, $\Big|\Big|\frac{\partial P}{\partial x_1}(y)\Big|\Big| = \Big|\Big|\frac{\partial P}{\partial x_1}(y)\Big|\Big| = 1$ par hypothèse. Il en résulte que la forme quadratique

$$q : (h_1, h_2) \to \langle\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y), P\rangle h_1^2 + 2\langle\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}(y), P\rangle h_1 h_2 + \langle\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)h_2^2, P\rangle h_2^2$$

est définie négative.
On remarque alors que

$$q(h_1, h_2) = \lambda\Big(\langle\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1}(y), N\rangle h_1^2 + 2\langle\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}(y), N\rangle h_1 h_2 + \langle\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2}(y)h_2^2, N\rangle\Big),$$

soit $q(h_1, h_2) = (h_1, h_2)A\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, ce qui contredit la dégénérescence de A.
En conclusion, la plus petite dimension dans laquelle G est représentable est 4.

II – Seconde partie

1. Fixons f dans E tel que $N_0(f) < \frac{1}{4C}$.
   Soient $\phi : E \to E$ telle que $\phi(v) = B(v,v) + f$, et u dans E tel que $N_0(u) \leqslant \frac{1}{2C}$. Il vient $N_0(\phi(u)) < \frac{1}{2C}$ et donc la restriction ϕ_1 de ϕ à la boule fermée $\overline{B}(0, \frac{1}{2C})$ est à valeurs dans cette même boule. De plus, $\forall (u,v) \in \overline{B}(0, \frac{1}{2C})^2$,

   $$N_0(\phi_1(u) - \phi_1(v)) = N_0(B(u,u) - B(v,v)) \leqslant N_0(B(u, u-v)) + N_0(B(v, u-v)) \leqslant \frac{1}{2} N_0(u-v).$$

   On peut donc appliquer le théorème du point fixe de Banach à ϕ_1 : il existe un unique u dans $\overline{B}(0, \frac{1}{2C})$ tel que $u = f + B(u,u)$. Cet élément s'obtient comme limite de toute suite du type $(\phi^{(n)}(u_0))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2C})$.

2. Par hypothèse, $f \in B_0(0, \frac{1}{4C})$ et $f \in E_k$ pour un certain k. Pour tout entier n, notons $u_n = \phi^{(n)}(f)$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans E_k et $N_0(u_n - u)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour conclure à l'appartenance de u à E_k, il suffit de montrer que la suite $(N_k(u_n))_{\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   On note que si $0 \leqslant l \leqslant k$, alors $f \in E_l$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E_0 par $M_0 = \frac{1}{2C}$.
   De plus, $N_1(B(u_n, u_n)) \leqslant C N_0(u_n) N_1(u_n) + D_1 N_0(u_n)^2$ et
   $N_1(u_{n+1}) \leqslant N_1(f) + C N_0(u_n) N_1(u_n) + D_1 N_0(u_n)^2 \leqslant N_1(f) + \frac{1}{2} N_1(u_n) + D_1 M_0^2$.
   On pose alors $a = N_1(f) + D_1 M_0^2$. De $N_1(u_{n+1}) \leqslant a + \dfrac{1}{2} N_1(u_n)$ on dduit alors pour tout n : $N_1(u_n) \leqslant 2a(1 - 2^{-n}) + 2^{-n} N_1(u_0)$.
   Il en résulte que $(N_1(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Supposons que $(N_l(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée pour $l < k$.
   Alors, $N_{l+1}(u_{n+1}) \leqslant N_{l+1}(f) + C M_0 N_{l+1}(u_n) + D_{l+1}(N_l(u_n))^2$.
   On en déduit de même que $(N_{l+1}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par une simple récurrence on conclu que $(N_k(u_n))_{\in\mathbb{N}}$ est bornée, et par suite que u appartient à E_k.

III – Troisième partie

1. L'galit est clairement vraie en dimension 1 et on suppose que c'est le cas en dimension $d-1$.
   Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction Λ-périodique. La continuité de f et de ses sections ainsi que la compacité des ensembles d'intégration permettent d'utiliser le théorème de Fubini :

   $$\begin{aligned}
   \int_X f(x-y)dy &= \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} \Big(\int_{[-\pi,\pi]} f(x_1 - y_1, \dots, x_d - y_d) dx_d \Big) dx_1 \dots dx_{d-1} \\
   &= \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} \Big(\int_{[-\pi,\pi]} f(x_1 - y_1, \dots, x_{d-1} - y_{d-1}, x_d) dx_d \Big) dx_1 \dots dx_{d-1} \\
   &= \int_{[-\pi,\pi]} \Big(\int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} f(x_1 - y_1, \dots, x_{d-1} - y_{d-1}, x_d) dx_1 \dots dx_{d-1} \Big) dx_d \\
   &= \int_{[-\pi,\pi]} \Big(\int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} f(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) dx_1 \dots dx_{d-1} \Big) dx_d \\
   &= \int_{[-\pi,\pi]^d} f(x) dx.
   \end{aligned}$$

2. (a) Soit $\delta \in]0, \pi[$. Pour tout n,

   $$I_n \geqslant 2 \int_0^{\delta/2} q_n(t) dt \geqslant \delta q_n(\delta/2).$$

D'où,

$$0 \leqslant \frac{1}{I_n}\int_{\delta}^{\pi} q_n(t)dt \leqslant \frac{1}{\delta}\Big(\frac{2+cos(\delta)}{2+cos(\delta/2)}\Big)^n$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Il en résulte :

$$0 \leqslant \frac{1}{I_n}\int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)dt - \frac{1}{I_n}\int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)dt \leqslant \frac{2}{\delta}\Big(\frac{2+cos(\delta)}{2+cos(\delta/2)}\Big)^n$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, d'où le résultat.

(b) La fonction f étant continue et périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta \in]0,\pi[$ tel que :

$$\forall (x,y) \in X^2,\ ||x-y||_\infty < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout entier n et tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)-f(x)| &\leqslant \int_X |f(x-y)-f(x)|p_n(y)dy \\ &\leqslant 2\varepsilon(2\delta)^d + \int_{X-[-\delta,\delta]^d} |f(x-y)-f(x)|p_n(y)dy \\ &\leqslant 2\varepsilon(2\delta)^d + 2||f||_\infty\Big(\frac{2}{I_n}\int_\delta^\pi q_n(t)dt\Big)^d, \end{aligned}$$

la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^d$ de (f_n) vers f en résulte.
Pour tout n, f_n est un polynme trigonométrique. L'espace vectoriel des polynmes trigonométriques est donc dense dans l'espace vectoriel des fonctions continues Λ-périodiques pour la norme $||\ ||\infty$.

(c) Si f est de classe C^r et $k = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{N}^d$ avec $[k] \leqslant r$, le théorème de dérivation sous le signe somme d'une intégrale dépendant d'un paramètre s'applique (les énoncés classiques subsistent en dimension quelconque, la dmonstration la plus simple repose sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue). Pour tout n, il vient

$$\frac{\partial^{[k]} f_n}{\partial^{k_1}x_1\ldots\partial^{k_d}x_d}(x) = \int_X \frac{\partial^{[k]} f}{\partial^{k_1}x_1\ldots\partial^{k_d}x_d}(x-y)p_n(y)dy$$

et d'après la question précédente, la suite des termes $\dfrac{\partial^{[k]} f_n}{\partial^{k_1}x_1\ldots\partial^{k_d}x_d}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^d$ vers $\dfrac{\partial^{[k]} f}{\partial^{k_1}x_1\ldots\partial^{k_d}x_d}$.

3. En travaillant sur les composantes de G, on déduit que la suite (G_n) - convolution de G avec le noyau p_n - converge uniformément vers G, de même pour toutes les dérivées partielles. Pour tout couple d'entiers positifs (n,m), on définit la fonction

$$x \to G_{n,m}(x) = (\frac{\pi}{m})^d \sum_{l\in J_m^d} G_n(\frac{\pi l}{m})p(x-\frac{\pi l}{m}).$$

Pour n fixé, $(G_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_n, de même pour toutes les dérivées partielles. On fixe $\varepsilon > 0$, il existe alors un couple $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $||G_{n,m}-G||_r < \varepsilon$.
Après réindexation, les y_j sont les $\dfrac{\pi l}{m}$ et les μ_j sont les $(\dfrac{\pi}{m})^d p(x-\dfrac{\pi l}{m})$.

4. On effectue une réduction de Gauss sur A :
   il existe $v = (v^1, \dots, v^d) \in (\mathbb{R}^d)^d$ tel que $A = \sum_{i=1}^{d} v^i \otimes v^i$.
   Pour tout $\delta > 0$, il existe $v_\delta = (v_\delta^1, \dots, v_\delta^d) \in \mathbb{Q}^d$ tel que $||v - v_\delta||_\infty < \delta$.
   Soit alors $A_\delta = \sum_{i=1}^{d} v_\delta^i \otimes v_\delta^i$, il vient :
$$||A - A_\delta|| \leqslant \sum_{i=1}^{d} ||v^i \otimes v^i - v_\delta^i \otimes v^i|| + \sum_{i=1}^{d} ||v_\delta^i \otimes v^i - v_\delta^i \otimes v_\delta^i||.$$
   qui tend vers 0 lorsque δ tend vers 0.
   On remarque alors que pour tout $\delta > 0$, il existe $\alpha_\delta \in \mathbb{N}^*$ tel que $w_\delta = \alpha_\delta v_\delta \in (\mathbb{Z}^d)^d$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, en prenant δ assez petit et en posant $a^{(i)} = \frac{1}{\alpha_\delta^2}$, $l^{(i)} = w_\delta^i$ il vient
$$||A - \sum_{i=1}^{d} a^{(i)} l^{(i)} \otimes l^{(i)}|| \leqslant \varepsilon.$$

5. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$,
$$\frac{\partial P_n}{\partial x_i}(x) = \Big(\frac{\partial r_k}{\partial x_i}(x) \frac{1}{n} cos(n < l^{(k)}, x >) - r_k(x) l_i^{(k)} sin(n < l^{(k)}, x >),$$
$$\frac{\partial r_k}{\partial x_i}(x) \frac{1}{n} sin(n < l^{(k)}, x >) + r_k(x) l_i^{(k)} cos(n < l^{(k)}, x >) \Big)_{1 \leqslant k \leqslant q}.$$
   On en déduit,
$$\langle \frac{\partial P_n}{\partial x_i}, \frac{\partial P_n}{\partial x_j} \rangle = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{n^2} \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} + r_k^2 l_i^{(k)} l_j^{(k)}.$$
   D'où :
$$\Gamma(P_n) = \frac{1}{n^2} \Big(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{n^2} \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} + \sum_{k=1}^{q} r_k^2 l^{(k)} \otimes l^{(k)}.$$

6. Compte tenu de la question 3, étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $D \in \mathbb{N}$, $(y_1, \dots, y_D) \in X^D$ et $(\mu_1, \dots, \mu_D) \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)^D$ tels que $|||G - \sum_{j=1}^{D} \mu_j G(y_j)|||_r \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$.
   En choisissant $\frac{\varepsilon}{4D \max_{1 \leqslant j \leqslant D} ||\mu_j||_\infty}$ au lieu de ε dans la question 4, pour chaque $G(y_j)$ on dispose d'une famille de réels strictement positifs $(a_j^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant d}$ et d'une famille d'éléments de L $(l_j^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant d}$.
   On remplace dans l'inégalité de la question 4, ce qui conduit à l'existence d'une famille $(a^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant q}$ d'éléments de $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$ et d'une famille $(l^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant q}$ d'éléments de L telles que :
$$|||G - \sum_{j=1}^{q} a^{(i)} l^{(i)}|||_r \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Pour $1 \leqslant i \leqslant q$, on pose alors $r_i = \sqrt{a^{(i)}}$. Pour n assez grand, le terme $||\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \frac{\partial r_k}{\partial x_j}||_r$ est plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$. Avec les notations de la question 5, il vient alors :
$$|||G - \Gamma(P_n)|||_r \leqslant \varepsilon.$$

IV – Quatrième partie

1. (a) Si p est un polynme trigonométrique, alors la suite $(S_N p)$ est stationnaire à partir d'un certain rang, et
$$||p||_0^2 = \sum_{l \in L} |\widehat{f}(l)|^2.$$

   (b) On note (,) le produit scalaire sur $C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ issu de forme polaire $||\ ||_0^2$. Pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$,
$$||f - S_n f||_0^2 = ||f||_0^2 + ||S_N f||_0^2 - 2(f, S_N f) = ||f||_0^2 - ||S_N f||_0^2.$$

   (c) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et $N \in \mathbb{N}$. Du théorème de projection, on déduit que le minimum de $\Big|\Big|f - \sum\limits_{[l] \leqslant N} a_l e^{i\langle l, . \rangle}\Big|\Big|_0$ est obtenu pour $a_l = \widehat{f}(l)$ pour tout l tel que $[l] \leqslant N$.
   Soit alors $\varepsilon > 0$, il existe un polynme trigonométrique p tel que $||f - p||_\infty \leqslant \varepsilon^{1/d}$. On en déduit $||f - p||_0 \leqslant \varepsilon$ et donc $||f - S_N f||_0 \leqslant \varepsilon$. D'après la question précédente, on conclu que le terme $\sum\limits_{l \in L_N} |\widehat{f}(l)|^2$ tend vers $||f||_0^2$ quand N tend vers $+\infty$.

2. (a) Notons d'abord que f est continue en tant que limite uniforme de fonctions continues. Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, $\sum\limits_{l \in L_N} (1 + [l])^{2s} |\widehat{f}_n(l)|^2$ tend vers $\sum\limits_{l \in L_N} (1 + [l])^{2s} |\widehat{f}(l)|^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   Il en résulte l'appartenance de f à H^s et $\sum\limits_{l \in L} (1 + [l])^{2s} |\widehat{f}(l)|^2 \leqslant \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} ||f_n||_s$.

   (b) Faisons une récurrence sur d.
   Pour $d = 1$,
$$\sum_{l=-N}^{N} \frac{1}{(\beta + [l])^\alpha} \leqslant \frac{1}{\beta^\alpha} + 2 \int_0^N \frac{1}{(\beta + x)^\alpha} dx.$$
   Le membre de droite est majoré par $\dfrac{1}{\beta^\alpha} + \dfrac{2}{(\alpha - 1)\beta^{\alpha - 1}}$, lui-même infrieur $\dfrac{\alpha + 1}{(\alpha - 1)\beta^{\alpha - 1}}$.
   Supposons la formule établie jusqu'au rang $d - 1 \geqslant 0$ et plaons nous à l'ordre d.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $L_N^n = \{l \in \mathbb{Z}^n,\ [l] \leqslant N\}$, il vient
$$\sum_{l \in L_N^d} \frac{1}{(\beta + [l])^\alpha} = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l \in L_N^{d-1}} \frac{1}{(\beta + k + [l])^\alpha}.$$
   Et on applique l'hypothèse de récurrence :
$$\sum_{l \in L_N^d} \frac{1}{(\beta + [l])^\alpha} \leqslant \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha - d + 2)(\alpha - d + 1)} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(\beta + k)^{\alpha - d + 1}},$$
   en utilisant le cas $d = 1$, ce dernier terme étant majoré par $\dfrac{\alpha(\alpha + 1)^2}{(\alpha - d + 2)(\alpha - d + 1)} \dfrac{1}{\beta^{\alpha - d}}$.
   L'inégalité $\dfrac{\alpha + 1}{(\alpha - 1)(\alpha - d + 2)} \leqslant \dfrac{1}{(\alpha - d)}$ est facile à établir pour $d \geqslant 1$, on peut donc conclure à l'inégalité annoncée :
$$\sum_{l \in L_N} \frac{1}{(\beta + [l])^\alpha} \leqslant \frac{(\alpha + 1)\alpha}{(\alpha - d + 1)(\alpha - d)} \frac{1}{\beta^{\alpha - d}}.$$

(c) Soit $f \in H^s$, de l'inégalité de Cauchy-Schwartz on déduit :

$$\sum_{l \in L_N} |\widehat{f}(l)| \leqslant ||f||_s \Big(\sum_{l \in L_N} \frac{1}{(1+[l])^{2s}} \Big)^{1/2}.$$

Puisque $2s > d$, il vient $\displaystyle\sum_{l \in L_N} |\widehat{f}(l)| \leqslant K(s)||f||_s$, où l'on a posé $K(s) = \dfrac{2s(2s+1)}{(2s-d+1)(2s-d)}$.
A l'aide du critère de Cauchy uniforme, on en déduit la convergence uniforme de $(S_N f)$ vers une limite g nécessairement continue. La suite des termes $||g - S_N f||_0$ converge donc vers 0 et, d'après la question IV-1.c), il vient $||f-g||_0 = 0$. On conclu alors à $g = f$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite de terme gnral $S_N f(x)$ conververge vers $f(x)$. Il en rsulte

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| \leqslant K(s)||f||_s.$$

(d) Soit (f_n) une suite de Cauchy de H^s. Alors $(||f_n||_s)$ est bornée, de plus pour tout couple d'entiers (n,m), $||f_n - f_m||_\infty \leqslant K(s)||f_n - f_m||_s$. La suite (f_n) converge uniformément vers une limite f appartenant à H^s (d'après IV-2.a).
Pour m fixé, en considérant la suite $(f_m - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on conclut que :

$$||f_m - f||_s \leqslant \overline{\lim_{n \to +\infty}} ||f_m - f_n||_s$$

ce qui assure la convergence de (f_n) vers f : H^s est complet.

3. (a) Soit $f \in H^{s+1}$, $1 \leqslant k \leqslant d$ et $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. La convergence de $\displaystyle\sum_{l \in L} |\widehat{f}(l)|^2 (1 + [l])^{2s+2}$ entraine celle de $\displaystyle\sum_{l \in L} l_k^2 |\widehat{f}(l)|^2 (1+[l])^{2s}$.
La série de fonctions

$$S_{N,k} : x_k \to \sum_{l \in L_N} \widehat{f}(l) e^{-i(y_1 l_1 + \dots + y_{k-1} l_{k-1} + x_k l_k + y_{k+1} l_{k+1} + \dots + y_d l_d)}$$

converge normalement vers $x_k \to f(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, y_{k+1}, \dots, x_d)$. De même, la série des dérivées termes à termes

$$x_k \to \sum_{l \in L_N} -i l_k \widehat{f}(l) e^{-i(y_1 l_1 + \dots + y_{k-1} l_{k-1} + x_k l_k + y_{k+1} l_{k+1} + y_d l_d)}$$

converge normalement.
Il en résulte l'existence en tout point d'une dérivée partielle de f par rapport à k, de plus :

$$\forall k \in \{1, \dots, d\},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{l \in L} -i l_k \widehat{f}(l) e^{-i\langle l, x \rangle}.$$

Cette dernière somme est continue par rapport à x comme limite uniforme de fonctions continues. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ appartient à H^s et :

$$\Big|\Big| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|\Big|_s^2 = \sum_{l \in L} l_k^2 |\widehat{f}(l)|^2 (1+[l])^{2s} \leqslant ||f||_{s+1}^2.$$

(b) Pour l'appartenance de f à H^r, il suffit de prouver la convergence de $\sum |\widehat{f}(l)|^2(1+[l])^{2r}$.
Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ notons $f_\alpha = \dfrac{\partial^{[\alpha]} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_d} x_d}$. Supposons que $[\alpha] = r$, f_α est continue et la suite $(||S_N f_\alpha||_0^2)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il en résulte la convergence de $\displaystyle\sum_{l\in L} |\widehat{f}(l) l_1^{\alpha_1} \ldots l_d^{\alpha_d}|^2$ et par suite, celle de

$$\sum_{\alpha\ /\ [\alpha]=r} \sum_{l\in L} |\widehat{f}(l) l_1^{\alpha_1} \ldots l_d^{\alpha_d}|^2 = \sum_{l\in L} |\widehat{f}(l)|^2 (l_1^2 + \ldots + l_d^2)^r.$$

la convergence de $(\displaystyle\sum_{l\in L_N} |\widehat{f}(l)|^2(1+[l])^{2r})_{N\in\mathbb{N}}$ en résulte : f appartient à H^r.
De plus, il existe $M(r,d) > 0$ tel que

$$||f||_r^2 \leqslant ||f||_0^2 + M(r,d) \sum_{l\in L} |\widehat{f}|^2 (l_1^2 + \ldots + l_d^2)^r,$$

enfin il existe $M'(r,d) > 0$ tel que

$$\sum_{l\in L} |\widehat{f}|^2 (l_1^2 + \ldots + l_d^2)^r \leqslant M'(r,d) \sum_{l\in L} |\widehat{f}|^2 (l_1^{2r} + \ldots + l_d^{2r}).$$

En posant $C(r) = Max(1, M(r,d)M'(r,d))$, il vient

$$||f||_r^2 \leqslant C(r)\Big(||f||_0^2 + \sum_{j=1}^{d} \Big|\Big| \frac{\partial^r f}{\partial^r x_j} \Big|\Big|_0^2 \Big)$$

.

(c) De ce qui précède, on déduit facilement que l'intersection des espaces H^s, $s > d/2$, est exactement $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

4. (a) Si $u \in H^{s+2}$, alors u est de classe C^1. De plus, pour $1 \leqslant j \leqslant d$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ appartient à H^{s+1} et est donc de classe C^1. Il en résulte que u est de classe C^2.
Pour $l \in L$, il vient $\widehat{\Delta u}(l) = -||l||^2 \widehat{u}(l)$, et

$$\sum_{l\in L_N} |\widehat{\Delta u}(l)|^2 (1+[l])^{2s} \leqslant \sum_{l\in L_N} |\widehat{u}(l)|^2 (1+[l])^{2s+4} \leqslant ||u||_{s+2}^2.$$

Δu étant continue, on en déduit que $\Delta u \in H^s$.
L'inégalité de Cauchy-Schwartz conduit à $(1+[l])^2 \leqslant (d+1)(1+||l||^2)$ et donc

$$||u||_{s+2} = \Big(\sum_{l\in L} |\widehat{u}(l)|^2 (1+[l])^{2s+4} \Big)^{1/2} \leqslant (d+1)||u - \Delta u||_s.$$

L'inégalité $||u - \Delta u||_s \leqslant ||u||_{s+2}$ est immédiate.

(b) L'injectivité de $u \to u - \Delta u$ de H^{s+2} dans H^s résulte des inégalités précédentes. Soit alors $v \in H^s$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}^d$ on a $v(x) = \displaystyle\sum_{l\in L} \widehat{u}(l) e^{i\langle l,x\rangle}$ (au sens de la limite de $S_N v$).
Pour tout $l \in L$, on pose $\alpha_l = \dfrac{\widehat{v}(l)}{1+||l||^2}$. La somme $\displaystyle\sum_{l\in L} |\alpha_l|^2 (1+[l])^{2s+4}$ existe du fait que v appartient à H^s. On en déduit l'existence et la continuité de $u : x \to \displaystyle\sum_{l\in L} \alpha_l e^{i\langle l,x\rangle}$.

De plus, pour tout l, $\widehat{u}(l) = \alpha_l$ (interversion des signes d'intégration et de sommation), il en résulte que u appartient à H^{s+2} et par un calcul simple $u - \Delta u = v$.
En conclusion, $u \to u - \Delta u$ est une bijection de H^{s+2} sur H^s. D'après la question précédente, il s'agit même d'un homéomorphisme.
L'image de $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ par cette application est contenue dans $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Réciproquement, si $v \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, alors d'après ce qui précède, $u : x \to \sum_{l \in L} \frac{\widehat{v}(l)}{1 + ||l||^2} e^{i\langle l, x \rangle}$ appartient à l'intersection des H^s, c'est à dire à $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

5. (a) Soient $(c_l)_{l \in L}$ et $(d_l)_{l \in L}$ deux familles de $\mathbb{C}$ presques nulles. Il vient successivement :

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in L} \Big| \sum_{k \in L} c_{l-k} d_k \Big|^2 &\leqslant \sum_{l \in L} \Big(\big(\sum_{k \in L} |c_{l-k}|\big) \sum_{k \in L} |c_{l-k}||d_k|^2 \Big) \\
&\leqslant \big(\sum_{k \in L} |c_k|\big) \sum_{l \in L} |c_{l-k}||d_k|^2 \\
&\leqslant \big(\sum_{k \in L} |c_k|\big) \sum_{l \in L} \sum_{k \in L} |c_k||d_l|^2 \\
&\leqslant \big(\sum_{k \in L} |c_k|\big)^2 \sum_{l \in L} |d_l|^2.
\end{aligned}$$

(b) f et g étant deux polynmes trigonométriques, un calcul simple donne :

$$\forall l \in L, \quad \widehat{(fg)}(l) = \sum_{k \in L} \widehat{f}(k) \widehat{g}(l-k).$$

(c) On remarque d'abord que pour k et l dans L, $[l] \leqslant [k] + [l-k]$. De plus, si a et b sont deux réels positifs, alors $(a+b)^{2s} \leqslant 2^{2s}(a^{2s} + b^{2s})$. Il vient

$$||fg||_s^2 \leqslant 2^{2s} \sum_{l \in L} \Big| \sum_{k \in L} \widehat{f}(k) \widehat{g}(l-k) \Big|^2 \big[(1 + [k])^2 + (1 + [l-k])^{2s} \big]$$

d'où

$$||fg||_s^2 \leqslant 2^{2s} \big(\sum_{l \in L} |\widehat{g}(l)| \big)^2 \sum_{k \in L} |\widehat{f}(k)|^2 (1 + [k])^{2s} + 2^{2s} \big(\sum_{l \in L} |\widehat{f}(l)| \big)^2 \sum_{k \in L} |\widehat{g}(k)|^2 (1 + [k])^{2s}$$

et on en déduit

$$||fg||_s^2 \leqslant 2^{2s+1} ||f||_s^2 ||g||_s^2.$$

(d) Soient f et g dans H^s. Le produit fg est donc continu. Fixons $N \in \mathbb{N}$. La suite de fonctions définie par $h_n = (S_N f)(S_n g)$ converge uniformément vers $(S_N f) g$. Par ailleurs, pour tout n, $||h_n||_s \leqslant C(s) ||f||_s ||g||_s$. Il rsulte de la question IV - 2.a) :

$$||(S_N f) g||_s \leqslant \overline{\lim_{n \to +\infty}} ||h_n||_s \leqslant C(s) ||f||_s ||g||_s.$$

Ainsi, $(||(S_N f) g||)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée et $((S_N f) g)_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg. On en déduit de mme que fg appartient à H^s et

$$||fg||_s \leqslant C(s) ||f||_s ||g||_s.$$

6. (a) Soit donc $m_0 > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. Pour $m \leqslant 0$, l'inégalité recherchée est triviale en posant $D(m) = 0$, on suppose à présent $m \geqslant 0$.
Posons $a = (1+b)t$, et donc $0 < t < 1$. L'inégalité cherchée s'écrit

$$(1+b)^m (1+t)^m \leqslant 2^{m_0} (1+b)^m + D(m)(1+b)^m t^2$$

ce qui est équivalent à
$$(1+t)^m \leqslant 2^{m_0} + D(m)t^2.$$
Si $m \leqslant m_0$, on peut imposer $D(m)=0$ puisque $0<t<1$.
Si $m > m_0$, l'étude de $\phi(t) = 2^{m_0} + D(m)t^2 - (1+t)^m$ montre que $D(m) = \dfrac{2^m}{(2^{m_0/m}-1)^2}$ convient.
Cette inégalité peut se symétriser : pour tout couple (a,b) de réels positifs, on a
$$(1+a+b)^m \leqslant 2^{m_0}((1+a)^m + (1+b)^m) + D(m)((1+b)^{m-2}a^2 + (1+a)^{m-2}b^2).$$

(b) *On suppose tout d'abord $s > s_0 + 2$.*
Soient f et g dans H^s. Il vient
$$||fg||_s^2 \leqslant \sum_{l\in L}\Big|\sum_{k\in L}\widehat{f}(l-k)\widehat{g}(k)\Big|^2(1+[k]+[k-l])^{2s}.$$
On applique alors l'inégalité de la question précédente :
$$||fg||_s^2 \leqslant 2^{2s_0}\sum_{l\in L}\Big|\sum_{k\in L}\widehat{f}(l-k)\widehat{g}(k)\Big|^2((1+[k])^{2s}+(1+[k-l])^{2s})+$$
$$D(2s)\sum_{l\in L}\Big|\sum_{k\in L}\widehat{f}(l-k)\widehat{g}(k)\Big|^2\big((1+[k])^{2s-2}(1+[k-l])^2+(1+[k-l])^{2s-2}(1+[k])^2\big).$$
Le premier terme se majore aisément par :
$$2^{s_0}\sum_{k\in L}|\widehat{g}(k)|^2(1+[k])^{2s}\big(\sum_{k\in L}|\widehat{f}(l)|\big)^2 + 2^{s_0}\sum_{k\in L}|\widehat{f}(k)|^2(1+[k])^{2s}\big(\sum_{k\in L}|\widehat{g}(l)|\big)^2 \leqslant$$
$$A_0(||g||_s^2||f||_{s_0}^2 + ||f||_s^2||g||_{s_0}^2)$$
où l'on a posé $A_0 = 2^{s_0}K(s)\displaystyle\sum_{k\in L}\frac{1}{(1+[k])^{2s_0}}$.
Quant au second terme, il est majoré par :
$$||g||_{s-1}^2\Big|\sum_{k\in L}|\widehat{f}(k)|(1+[k])\Big|^2 + ||f||_{s-1}^2\Big|\sum_{k\in L}|\widehat{g}(k)|(1+[k])\Big|^2,$$
lui-même majoré par :
$$(||g||_{s-1}^2||f||_{s-1}^2 + ||f||_{s-1}^2||g||_{s-1}^2)\sum_{k\in L}\frac{1}{(1+[k])^{2(s-2)}}.$$
La dernière somme étant finie puisque $s-2 > s_0$.
On en déduit l'existence de réels $A>0$ et $B(s)\geqslant 0$ tels que pour tout f, g dans H^s on ait :
$$||fg||_s \leqslant A(||f||_{s_0}||g||_s + ||f||_s||g||_{s_0}) + B(s)||f||_{s-1}||g||_{s-1}.$$
On suppose à présent que $s_0 \leqslant s \leqslant s_0+2$. Comme précédemment, si a et b sont deux réels positifs, il est facile d'établir :
$$(1+a+b)^{2s} \leqslant 2^{2s}((1+a)^{2s}+(1+b)^{2s}) \leqslant 2^{2s_0+4}((1+a)^{2s}+(1+b)^{2s}).$$
En suivant la procédure ci-dessus, il vient :
$$||fg||_s \leqslant 2^{2s_0+4}\sum_{l\in L}\frac{1}{(1+[k])^{2s_0}}(||f||_{s_0}||g||_s + ||f||_s||g||_{s_0}).$$
En choisissant la constante A correctement, on peut donc imposer $B(s)=0$ lorsque $s \leqslant s_0+2$.

V – Cinquième partie

1. Soit $F:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ une application de classe C^∞ libre et $P:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^p$ de classe C^∞ ayant en tout point une différentielle injective.
Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, $1\leqslant k\leqslant d$ et $1\leqslant l\leqslant d$ il vient :

$$\frac{\partial FoP}{\partial x_k}(x)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial F}{\partial y_i}(P(x))\frac{\partial P_i}{\partial x_k}(x),$$

et

$$\frac{\partial^2 FoP}{\partial x_l\partial x_k}(x)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial F}{\partial y_i}(P(x))\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_l\partial x_k}(x)+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial P_i}{\partial x_k}(x)\frac{\partial P_j}{\partial x_l}(x)\frac{\partial^2 F}{\partial y_j\partial y_i}(P(x)).$$

Pour un x donné, on forme la combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{k=1}^{d}\alpha_k\frac{\partial FoP}{\partial x_k}(x)+\sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\beta_{l,k}\frac{\partial^2 FoP}{\partial x_l\partial x_k}(x)=0.$$

Les coefficients des vecteurs $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_j\partial y_i}(P(x))$ fournissent le système d'équations :

$$\sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\beta_{l,k}\frac{\partial P_i}{\partial x_k}(x)\frac{\partial P_j}{\partial x_l}(x)=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant p.$$

En introduisant la matrice $B=(\beta_{l,k})_{1\leqslant l,k\leqslant d}$, cela s'écrit :

$$\forall(i,j)\in\{1,\dots,p\},\quad \big(\frac{\partial P_j}{\partial x_1}(x)\dots\frac{\partial P_j}{\partial x_d}(x)\big)B\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P_i}{\partial x_1}(x)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial P_i}{\partial x_d}(x)\end{pmatrix}=0.$$

La différentielle de P au point x est injective, la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P_i}{\partial x_1}(x)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial P_i}{\partial x_d}(x)\end{pmatrix}\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est donc de rang d, d'o $B=0$. Il s'en suit immédiatement que $\alpha_1=\ldots=\alpha_d=0$ et que FoP est libre.

Pour l'application F considérée dans la question et pour tout $y\in\mathbb{R}^p$, le système

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\frac{\partial F}{\partial y_k}(y)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p}b_{i,j}\frac{\partial^2 F}{\partial y_j\partial y_i}(y)=0$$

est triangulaire inférieur avec des 1 sur la diagonale : F est libre.
On défini alors une application $P:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{2d}$ en posant $P(x_1,\dots,x_d)=\big((cos(x_k),sin(x_k)\big)_{1\leqslant k\leqslant d}$.
Il est facile de vérifier l'injectivité de $dP(x)$ en tout point x et donc $P_0=FoP$ est un élément libre de $\mathbb{C}^\infty_{per}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d(2d+3)})$.

2. Soient Q_1 et Q_2 des éléments de $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^N)$. Pour $1\leqslant i,j\leqslant d$, un calcul donne

$$R_{i,j}(Q_1,Q_2) = \langle \frac{\partial Q_1}{\partial x_i}, \frac{\partial Q_2}{\partial x_j}\rangle - \sum_{k=1}^{d}\langle \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_k \partial x_j}\rangle + \langle \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_j \partial x_i}, \Delta Q_2\rangle + \langle \Delta Q_1, \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_i \partial x_j}\rangle.$$

On a une somme fini de terme du type

$$\frac{\partial Q_{1,\alpha}}{\partial x_l}\frac{\partial Q_{2,\beta}}{\partial x_r},\ \frac{\partial^2 Q_{1,\alpha}}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial Q_{2,\beta}}{\partial x_r},\ \text{et}\ \frac{\partial^2 Q_{1,\alpha}}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial^2 Q_{2,\beta}}{\partial x_r \partial x_s}.$$

D'après la partie IV, chacun de ces termes est majoré en norme $||\ ||_{s-2}$ par une constante (dépendant de N, s et d) que multiplie $||Q_1||_s||Q_2||_s$.

Bien entendu, lorsque Q_1 et Q_2 sont éléments de $(H^s)^N$, et $s > (d/2)+2$, alors Q_1 et Q_2 sont de classe C^2 et ce qui précède est conservé. Il existe alors une constante $C_1(s) > 0$ qui dépend de d, N et s telle que :

$$\forall Q_1 \in (H^s)^N,\ \forall Q_2 \in (H^s)^N,\ \ ||R_{i,j}(Q_1,Q_2)||_{s-2} \leqslant C_1(s)||Q_1||_s||Q_2||_s.$$

3. Soit $H \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ et $Q \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$ une solution de (S).
Par un calcul obscur,
de $\langle \frac{\partial P_0}{\partial x_i}, Q\rangle = D^{-1}\langle \frac{\partial P_0}{\partial x_j}\rangle, \Delta Q\rangle$ on déduit $\frac{\partial}{\partial x_j}D\langle \frac{\partial P_0}{\partial x_i}, Q\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}D\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \Delta Q\rangle$.
D'où, $2D\langle \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_i \partial x_j}, Q\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \Delta Q\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \Delta Q, \frac{\partial Q}{\partial x_j}\rangle - D\langle \frac{\partial P_0}{\partial x_i}, \frac{\partial Q}{\partial x_j}\rangle - D\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \frac{\partial P_0}{\partial x_j}\rangle$.
Or, $2D\langle \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_i \partial x_j}, Q\rangle = -D(H_{i,j}) + R_{i,j}(Q,Q)$, et il en résulte
$D(H_{i,j}) = R_{i,j}(Q,Q) - \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \Delta Q\rangle - \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \Delta Q, \frac{\partial Q}{\partial x_j}\rangle + D\langle \frac{\partial P_0}{\partial x_i}, \frac{\partial Q}{\partial x_j}\rangle + D\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \frac{\partial P_0}{\partial x_j}\rangle$
qui vaut $D\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \frac{\partial Q}{\partial x_j}\rangle + D\langle \frac{\partial P_0}{\partial x_i}, \frac{\partial Q}{\partial x_j}\rangle + D\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \frac{\partial P_0}{\partial x_j}\rangle$.
L'application D induit une bijection de $C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$ sur lui-même, on déduit l'égalité

$$H = \Gamma(Q) + \Big(\langle \frac{\partial P_0}{\partial x_i}, \frac{\partial Q}{\partial x_j}\rangle\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant d} + \Big(\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \frac{\partial P_0}{\partial x_j}\rangle\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}.$$

Et donc :

$$\Gamma(P_0+Q) = \Gamma(P_0) + \Gamma(Q) + \Big(\langle \frac{\partial P_0}{\partial x_i}, \frac{\partial Q}{\partial x_j}\rangle\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant d} + \Big(\langle \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \frac{\partial P_0}{\partial x_j}\rangle\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant d} = \Gamma(P_0) + H.$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la famille $\{\frac{\partial P_0}{\partial x_i}(x),\ 1 \leqslant i \leqslant d\} \cup \{\frac{\partial^2 P_0}{\partial x_i \partial x_j}(x),\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d\}$ est une base de $V(x)$ que l'on munit de la restriction du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$. Cette famille s'orthonormalise par le procédé de Schmidt en $\{e_i(x),\ 1 \leqslant i \leqslant d\} \cup \{e_{ij}(x),\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d\}$. Compte tenu du procédé, il est clair que ces fonctions sont de classe C^∞ et que le passage d'une famille de fonctions à l'autre d'effectue par des matrices elles aussi de classes C^∞.
Pour tout x, on écrit

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{d}\langle Q, e_k(x)\rangle e_k(x) + \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant d}\langle Q, e_{kl}(x)\rangle e_{kl}(x).$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, il existe donc deux familles $(a_{i,k})_{1\leqslant i\leqslant d}$ et $(a_{ij,k})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d}$ de fonctions de classes C^∞ telles que pour tout x,

$$\langle Q, e_k(x)\rangle = \sum_{i=1}^{d} a_{i,k}(x)\langle Q, \frac{\partial P_0}{\partial x_i}(x)\rangle + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d} a_{ij,k}(x)\langle Q, \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_i \partial x_j}(x)\rangle.$$

De même pour $\langle Q, e_{kl}(x)\rangle$.
En utilisant le système (S), on en déduit l'existence d'une fonction $\tilde{H} \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$ indépendante de Q (ne dépendant que de H et de P_0 par l'intermdiaire des vecteurs e_k et e_{kl}) et d'une forme bilinéaire $\mathcal{B}$ de $(H^s)^N \times (H^s)^N$ à valeurs dans $(H^s)^N$ telles que

$$Q = \tilde{H} + \mathcal{B}(Q, Q),$$

où $\mathcal{B}(Q_1, Q_2)$ est une somme finie de termes du type :

$$D^{-1}\Big(A_i\big(\langle\frac{\partial Q_1}{\partial x_i}, \Delta Q_2\rangle + \langle\frac{\partial Q_2}{\partial x_i}, \Delta Q_1\rangle\big)e_i\Big) \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant d,$$

et

$$D^{-1}\big(A_{ij}R_{ij}(Q_1, Q_2)e_{ij}\big) \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d,$$

les applications à valeurs réelles A_i et A_{ij} étant de classe C^∞. D'après la partie IV, (et compte tenu des questions IV-4.a et V-2) il existe une constante $C_2(s)$ telle que :

$$\forall (Q_1, Q_2) \in (H^s)^N \times (H^s)^N, \quad ||\mathcal{B}(Q_1, Q_2)||_s \leqslant C_2(s)||Q_1||_s||Q_2||_s.$$

5. Pour tout entier k, on pose $E_k = (H^{s_0+k+2})^N$, et pour $Q \in E_k$, $N_k(Q) = ||Q||_{s_0+k+2}$.

   On va montrer que les hypothèses émises à la questions II-1 sont vérifiées ici.

   Soit $(u_n) \in E_k^{\mathbb{N}}$ et $u \in E_0$ tels que $(N_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit borné et $N_0(u_n - u)$ tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   Pour tout $l \in L$, la suite $(\widehat{u_n}(l))$ converge vers $\widehat{u}(l)$. De plus, il existe $M > 0$ tel que pour tout n on ait $\sum_{l\in L} |\widehat{u_n}(l)|^2(1 + [l])^{2(s_0+k+2)} \leqslant M$.

   On en déduit que pour tout entier N, $\sum_{l\in L_N} |\widehat{u}(l)|^2(1 + [l])^{2(s_0+k+2)} \leqslant M$ et par suite u appartient à E_k (u est continue car dans E_0).

   Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ on a $s_0 + k + 2 \geqslant d/2 + 2$ et pour tout $u \in E_k$ il vient

   $$N_k(\mathcal{B}(u, u)) \leqslant C_2(s_0 + k + 2)N_k(u)^2.$$

   D'après le raffinement (2) de la question IV-6.b, il existe $\tilde{A} > 0$ indépendant de k et $\tilde{B}(k)$ tels que pour tout u et v dans E_k on ait

   $$N_k(\mathcal{B}(u, v) \leqslant \tilde{A}(N_0(u)N_k(v) + N_k(u)N_0(v)) + \tilde{B}(k)N_{k-1}(u)N_{k-1}(v).$$

   D'où le résultat escompté en prenant $u = v$, puis en appliquant le résultat de la question II-2.

6. Notons tout d'abord que si $G_1 = \Gamma(P_1)$ et $G_2 = \Gamma(P_2)$ sont deux métriques de dimension d représentables en dimension N_1 et N_2 respectivement, alors $G_1 + G_2$ est représentable (mais pas $G_1 - G_2$ en général). En effet, soit $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, qui à x associe $(P_1(x), P_2(x))$, on vérifie que $G_1 + G_2 = \Gamma(P)$.

Soit alors $G = (G_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ une métrique quelconque de dimension d. Par compacité, il existe $t > 0$ tel que $G - tG_0$ soit encore une métrique de dimension d.

Par densit, il existe alors $H = (H_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ tel que $G - tG_0 + H$ soit représentable en une certaine dimension N' et $\sup\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant d} ||H_{ij}||_{s_0+2} \leqslant t\varepsilon_0$ (le ε_0 de la question prcdente). Il en résulte que $tG_0 - H$ est représentable en dimension N, et par conséquent $G = (G - tG_0 + H) + (tG_0 - H)$ est représentable en dimension $N + N'$.