Agrégation de Mathématiques 1999 - Concours Externe

Mathématiques Générales

Notations et définitions. Si A et B sont des ensembles, on note $A - B$ l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Dans tout le problème, $\mathbf{k}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe un entier n strictement positif et un $\mathbf{k}$-espace vectoriel V de dimension $n+1$. On munit V de sa topologie d'espace vectoriel normé. On note $\mathbf{P}V$ l'espace projectif associé à V, c'est à dire l'ensemble des droites vectorielles de V , ou encore le quotient de $V - \{0\}$ par la relation d'équivalence de colinéarité. On note $\pi : V - \{0\} \mapsto \mathbf{P}V$ l'application quotient, qui à un vecteur non nul x associe la droite engendrée par x. Soit d un entier; on appelle *sous-espace projectif* de $\mathbf{P}V$ *de dimension* d un sous-ensemble P de $\mathbf{P}V$ tel que $\pi^{-1}(P) \cup \{0\}$ soit un sous-espace vectoriel de V de dimension d + 1 , que l'on notera alors toujours $\widehat{P}$. Les sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}V$ de dimension 0 sont donc les points de $\mathbf{P}V$, ceux de dimension 1 sont appelés *droites projectives*, ou simplement droites, et ceux de dimension 2 *plans projectifs*, ou simplement plans.

Si q est une forme quadratique sur V, on appelle *quadrique projective* associée à q le sous-ensemble $Q = \pi\big(\{x \in V - \{0\} \ / \ q(x) = 0\}\big)$ de $\mathbf{P}V$. Soit m un entier vérifiant $0 \leq 2m \leq n+1$; on dit que q est de *type* m s'il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que, pour tout vecteur x de V de coordonnes $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on ait

$$q(x) = x_0 x_m + x_1 x_{m+1} + \cdots + x_{m-1} x_{2m-1}$$

On dit qu'une telle base est *adaptée* à q. Si q est de type m, on dira aussi que Q est une quadrique de type m.

Préliminaire

Dans toute cette partie, q désigne une forme quadratique sur V et Q la quadrique projective associée.

1. Soient P un sous-espace projectif de $\mathbf{P}V$ de dimension d et P' un sous-espace projectif de $\mathbf{P}V$ de dimension d'
   (a) Si $d + d' \geq n$, montrer que P rencontre P'.
   (b) Si P est disjoint de P' , montrer qu'il existe un unique sous-espace projectif de dimension $d + d' + 1$ de $\mathbf{P}V$ qui contient P et P'.
2. (a) On suppose $n = 1$; si Q contient trois points distincts, montrer que $Q = \mathbf{P}V$.
   (b) On suppose $n = 2$; si Q contient une droite projective D, montrer que soit $Q = \mathbf{P}V$, soit il existe une droite projective D' telle que $Q = D \cup D'$.
3. Soit D une droite de $\mathbf{P}V$.
   (a) Si D rencontre Q en au moins trois points, montrer que D est contenue dans Q.
   (b) Si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, montrer que D rencontre Q.
4. Soit m un entier positif.
   (a) Lorsque $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, caractériser les formes quadratiques de type m à l'aide de leur signature.
   (b) Lorsque $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, caractériser les formes quadratiques de type m à l'aide de leur rang.
5. On suppose $n + 1 = 2m$ et q de type m.
   (a) Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace projectif de $\mathbf{P}V$ contenu dans Q.

(b) Soit q' une forme quadratique sur V dont la quadrique associée contient Q. Montrer que q' est proportionnelle à q (on pourra montrer que la matrice de q' dans une base de V adaptée à q est $\begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée d'ordre m, puis que A est diagonale, puis que A est multiple de l'identité).

Première Partie

Droites projectives contenues dans une quadrique de type 2

On suppose dans cette partie $n = 3$. Soient D_1, D_2 et D_3 des droites de $\mathbf{P}V$ deux à deux disjointes.

1. Montrer que par chaque point x de D_1 , il passe une unique droite qui rencontre D_2 et D_3.
   On la notera D_x.

2. Soient x et y des points distincts sur D_1. Montrer que D_x ne rencontre pas D_y.

3. (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ de V telle que $\widehat{D_2}$ soit le sous-espace vectoriel de V engendré par e_0 et e_1, que $\widehat{D_3}$ soit le sous-espace vectoriel de V engendré par e_2 et e_3, et que $\widehat{D_1}$ soit le sous-espace vectoriel de V engendré par $e_0 - e_3$ et $e_1 + e_2$.
   (b) On définit une forme quadratique q sur V en posant $q(x) = x_0x_2 + x_1x_3$ pour tout vecteur x de coordonnées $(x_0, \ldots, x_3)$ dans la base $\mathcal{B}$. On note Q la quadrique projective associée. Montrer que pour tout x dans D_1, la droite D_x est contenue dans Q.
   (c) Montrer l'égalité $Q = \bigcup_{x \in D_1} D_x$ (si $y \in Q - D_1$, on pourra considérer l'intersection de Q avec le

   plan contenant y et D_1).

4. Soient x un point de Q et $\widehat{x}$ la droite vectorielle de V associée. On note $\widehat{x}^\perp$ l'orthogonal de $\widehat{x}$ pour q, et $x^\perp$ le plan projectif associé $\pi(\widehat{x}^\perp - \{0\})$.

   (a) Montrer que toute droite projective passant par x et contenue dans Q est contenue dans $x^\perp$.
   (b) Quel est le rang de la restriction de q à $\widehat{x}^\perp$?
   (c) Montrer qu'exactement deux droites contenues dans Q passent par x.

5. On note $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des droites contenues dans Q qui sont du type D_x, pour $x \in D_1$, et $\mathcal{P}^-$ l'ensemble des droites contenues dans Q qui ne sont pas de ce type.

   (a) Montrer que par chaque point de Q, il passe exactement une droite de $\mathcal{P}^+$ et une droite de $\mathcal{P}^-$. En déduire que deux droites distinctes de $\mathcal{P}^+$ (respectivement de $\mathcal{P}^-$) sont disjointes.
   (b) Montrer que chaque droite de $\mathcal{P}^+$ rencontre chaque droite de $\mathcal{P}^-$.

6. Soient D_1, D_2, D_3 et D_4 des droites de $\mathbf{P}V$ deux à deux disjointes. Montrer que l'on est dans l'un des quatre cas suivants, et que chacun de ces cas peut se produire, à l'exception du premier lorsque $\mathbf{k} = \mathbb{C}$:

   - aucune droite ne rencontre D_1 , D_2 , D_3 et D_4 ;
   - exactement une droite rencontre D_1 , D_2 , D_3 et D_4 ;
   - exactement deux droites rencontrent D_1 , D_2 , D_3 et D_4 ;
   - une infinité de droites rencontrent D_1 , D_2 , D_3 et D_4 .

Deuxième Partie

Plans projectifs contenus dans une quadrique de type 3

Soit d un entier vérifiant $0 \leq d \leq n$. On note $\mathcal{G}_d$ l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}V$ de dimension d (c'est-dire aussi l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension d + 1). En particulier, $\mathcal{G}_0 = \mathbf{P}V$. On note $GL(V)$ le groupe des automorphismes linéaires de V ; c'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel des endomorphismes de V, que l'on munit de la topologie induite.

1. Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension $d+1$.

   (a) On définit une application $\rho_W : GL(V) \mapsto \mathcal{G}_d$ en associant à un élément g de $GL(V)$ le sous-espace projectif de $\mathbf{P}V$ associé au sous-espace vectoriel $g(W)$ de V. Montrer que ρ_W est surjective.

   (b) On munit $\mathcal{G}_d$ de la topologie dont les ouverts sont les sous-ensembles $\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}_g$ tels que $\rho_W^{-1}(\mathcal{U})$ soit ouvert dans $GL(V)$. Montrer que cette topologie est indépendante du choix de W et que ρ_W est continue pour cette topologie.

2. Soit M un sous-espace vectoriel de V de dimension $n-d$. Montrer que
$$\mathcal{U}_M = \{P \in \mathcal{G}_d \ / \ \widehat{P} \cap M = \{0\}\}$$
   est un ouvert de $\mathcal{G}_d$ homéomorphe à $\mathbf{k}^{(d+1)(n-d)}$ (on pourra introduire un supplémentaire W de M dans V, et considérer l'application ρ_W associée).

3. On fixe une base $(e_0, ..., e_n)$ de V . Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties à $n-d$ éléments de $\{0, \ldots, n\}$. Pour tout I dans $\mathcal{I}$, on note M_I le sous-espace vectoriel de V engendré par $\{e_i; i \in I\}$.
   Montrer l'égalité $\mathcal{G}_d = \bigcup\limits_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_{M_I}$.

4. Montrer qu'une partie A de $\mathcal{G}_d$ est ouverte (respectivement fermée) si et seulement si, pour tout I dans $\mathcal{I}$, l'ensemble $A \cap \mathcal{U}_{M_I}$ est ouvert (respectivement fermé) dans $\mathcal{U}_{M_I}$.

5. On note V^* l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel V et $A(V^*)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur V^*. On note enfin $\mathbf{P}A(V^*)$ l'espace projectif associé à $A(V^*)$.

   (a) Quelle est la dimension de $A(V^*)$?

   (b) Montrer que le déterminant d'une matrice carrée antisymétrique d'ordre impair est nul.

   (c) Montrer que toute forme bilinéaire alternée sur V^* est de rang pair.

   (d) Soient D un élément de $\mathcal{G}_1$ et (d_1, d_2) une base de $\widehat{D}$. On associe à D la forme bilinéaire
$$V^* \times V^* \mapsto \mathbf{k} \ , \ (l_1, l_2) \mapsto l_1(d_1)\ l_2(d_2) - l_1(d_2)\ l_2(d_1)$$
   Montrer que l'on définit ainsi une application $\kappa : \mathcal{G}_1 \mapsto \mathbf{P}A(V^*)$, puis que κ est injective.

   (e) Caractériser les points de l'image de κ. Décrire l'application réciproque $\kappa^{-1} : \kappa(\mathcal{G}_1) \mapsto \mathcal{G}_1$.

   Dans toute la suite de cette partie, on suppose $n = 3$.

6. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ une matrice antisymétrique à coefficients dans $\mathbf{k}$. Déterminer un polynôme homogène en les coefficients $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$ dont le carré soit le déterminant de A. En déduire que l'image de κ, est une quadrique Q de type 3 dans $\mathbf{P}A(V^*)$.

7. Soient x un point de $\mathbf{P}V$ et P un plan dans $\mathbf{P}V$. On note $\Pi_x = \kappa(\{D \in \mathcal{G}_1 \ / \ x \in D\})$ et $\Pi_P = \kappa(\{D \in \mathcal{G}_1 \ / \ D \subset P\})$

   (a) Montrer que Π_x est un plan dans $\mathbf{P}A(V^*)$.

   (b) Montrer que Π_P est un plan dans $\mathbf{P}A(V^*)$.

   (c) Montrer que $\Pi_x \cap \Pi_P$ est vide si $x \notin P$, et que c'est une droite projective sinon.

8. Soient ω_1 et ω_2 des formes bilinéaires alternées dégénérées sur V^* . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   (i) la forme bilinéaire alternée $\omega_1 + \omega_2$ est non dégénérée;

   (ii) $V^* = \ker(\omega_1) \oplus \ker(\omega_2)$.

9. En déduire que toute droite contenue dans Q est une intersection $\Pi_x \cap \Pi_P$, où P est un plan dans $\mathbf{P}V$ et x un point de P.

10. Montrer que tout plan contenu dans Q est soit du type Π_x, avec $x \in \mathbf{P}V$, soit du type Π_P, où P est un plan dans $\mathbf{P}V$.

11. On obtient ainsi une partition de l'ensemble des plans contenus dans Q en deux sous- ensembles. Montrer que l'intersection de deux de ces plans est de dimension paire si et seulement s'ils sont dans le même sous-ensemble (on rappelle que conformément à nos conventions, l'ensemble vide est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}V$ de dimension -1).

Troisième Partie

Espaces projectifs contenus dans une quadrique de type m

Dans toute cette partie, on suppose qu'il existe un entier m tel que $n = 2m - 1$ et l'on fixe une forme quadratique q de type m sur V ainsi qu'une base $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{2m-1})$ de V adaptée à q (*cf.* Notations et définitions). On note Q la quadrique projective associée à q et $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}V$ de dimension $m-1$ contenus dans Q ; c'est un sous-ensemble de l'espace topologique $\mathcal{G}_{m-1}$ défini dans la première question de la partie précédente.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est fermé dans $\mathcal{G}_{m-1}$.

2. Soit I une partie de $\{0, \ldots, m-1\}$. On pose $I^C = \{0, \ldots, m-1\} - I$. Soit N_I le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ et $(e_{m+i})_{i \in I^C}$. On note u_I l'automorphisme de V défini par $u_I(e_i) = e_{m+i}$ et $u_I(e_{m+i}) = e_i$ si $i \in I$, et $u_I(e_i) = e_i$ et $u_I(e_{m+i}) = e_{m+i}$ si $i \in I^C$ de sorte que $N_I = u_I(N_\emptyset)$. En particulier, $u_\emptyset$ est l'identité de V.

   (a) Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{U}_{N_\emptyset}$ est homéomorphe à $\mathbf{k}^{m(m-1)/2}$.

   (b) Montrer que l'application $v_I : \mathcal{G}_{m-1} \mapsto \mathcal{G}_{m-1}$ qui à un sous-espace projectif P de $\mathbf{P}V$ de dimension $m-1$ associe le sous-espace projectif $u_I(P)$, est un homéomorphisme. Déterminer $v_I(\mathcal{P} \cap \mathcal{U}_{N_\emptyset})$

   (c) Montrer que $\mathcal{P}$ est contenu dans la réunion des $\mathcal{U}_{N_I}$, lorsque I parcourt l'ensemble des des parties de $\{0, \ldots, m-1\}$.

   (d) Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{U}_{N_\emptyset} \cap \mathcal{U}_{N_I}$ est vide si et seulement si le cardinal de I est impair.

   (e) Soient I et J des parties de $\{0, \ldots, m-1\}$; déterminer $u_I(N_J)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur I et J pour que $\mathcal{P} \cap \mathcal{U}_{N_I} \cap \mathcal{U}_{N_J}$ soit vide.

3. En déduire que $\mathcal{P}$ est réunion disjointe de deux sous-ensembles fermés connexes homéomorphes notés $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$, et que deux sous-espaces projectifs de dimension $m-1$ contenus dans Q sont dans le même sous-ensemble $\mathcal{P}^+$ ou $\mathcal{P}^-$ si et seulement si la dimension de leur intersection a même parité que $m-1$.

4. Soit P_1 un sous-espace projectif de $\mathbf{P}V$ de dimension $m-2$ contenu dans Q. Montrer qu'il existe un unique élément de $\mathcal{P}^+$ contenant P_1 et un unique élément de $\mathcal{P}^-$ contenant P_1.

Quatrième Partie

Intersection de deux quadriques

On suppose dans toute cette partie $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. On fixe des formes quadratiques q et q' sur V, de quadriques associées Q et Q', et l'on note X le sous-ensemble $Q \cap Q'$ de $\mathbf{P}V$. Pour tout nombre complexe λ, on pose $q_\lambda = \lambda q - q'$.

1. On suppose $n = 2$. Montrer que X n'est pas vide, et que si X contient au moins cinq points, soit il contient une droite, soit q et q' sont proportionnelles (on pourra montrer qu'il existe une combinaison linéaire de q et q' qui est dégénérée).

2. On suppose $n \geq 5$. Montrer que par tout point de X passe (au moins) une droite contenue dans X.

3. On suppose q non dégénérée. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) l'ensemble des nombres complexes λ tels que la forme quadratique q_λ soit dégénérée a $n+1$ éléments;

   (ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de V et des nombres complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distincts tels que, pour tout point x de V de coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on ait

   $$q(x) = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad , \quad q'(x) = \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

   Dans toute la suite de cette partie, on suppose ces conditions réalisées.

4. Montrer que le groupe $G_n = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$ opère sur $\mathbf{P}V$ de façon que :

   - pour tout g dans G_n et tout x dans X, on ait $g \,.\, x \in X$;

   - pour tout x dans X, il existe g dans G_n tel que $g \,.\, x \neq x$.

5. On suppose $n = 2$. Montrer que X a exactement quatre points qui forment une orbite pour l'action du groupe G_2.

6. Montrer que toute forme quadratique dont la quadrique associée contient X est combinaison linéaire de q et q'.

7. Soient x un point de X et $\widehat{x}$ la droite vectorielle de V associée.
   On note $\widehat{x}^\perp$ l'orthogonal de $\widehat{x}$ pour q.

   (a) Montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que la restriction de la forme quadratique q_λ à $\widehat{x}^\perp$ soit non dégénérée.

   (b) Montrer que tout sous-espace projectif de $\mathbf{P}V$ contenu dans X est de dimension au plus $\dfrac{n}{2} - 1$.

8. On suppose $n = 5$. Montrer que par tout point de X passent au plus quatre droites contenues dans X.

9. On suppose n = 4.

   (a) Montrer que X contient exactement seize droites, qui forment une orbite pour l'action du groupe G_4 (on pourra fixer une base de V comme dans la question 3)(ii), chercher les droites contenues dans X qui joignent un point de coordonnées homogènes $(1, 0, x_2, x_3, x_4)$ à un point de coordonnées homogènes $(0, 1, y_2, y_3, y_4)$, et montrer que l'on obtient ainsi toutes les droites contenues dans X).

   (b) Soit D l'une des droites contenues dans X. Montrer que D rencontre exactement cinq des quinze autres droites contenues dans X, et que ces cinq droites sont deux à deux disjointes.

****