

# Agrégation de Mathématiques 2000 - Concours Externe

## Analyse et Probabilités.

On notera pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}^k$  l'ensemble des fonctions  $k$ -fois dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , et  $\mathcal{C}_c^k$  l'ensemble des fonctions  $k$ -fois dérivables à support compact de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Pour  $p \geq 1$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurable telle que } \|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x) dx < +\infty\}$

et l'ensemble  $L^p(\mathbb{R}^n)$  des classes d'équivalence de  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$  par la relation  $\mathcal{R}$ , où  $f \mathcal{R} g$  si et seulement si  $f(x) = g(x)$  pour presque tout  $x$  pour la mesure de Lebesgue.

On désigne par  $E$  l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques d'intervalles bornés.

L'espace  $L^2 = L^2(\mathbb{R})$  est muni du produit scalaire  $(u|v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v(x)}dx$  et  $\|u\|_{L^2} = (u|u)^{1/2}$ . On admet que pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $L^1(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{C}_c^k}$  pour la norme  $\|\cdot\|_{L^1}$  (pour un ensemble  $A$ ,  $\overline{A}$  désigne l'adhérence de  $A$ ).

Les parties III, IV sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra admettre le résultat d'une question dans les suivantes en indiquant précisément ce qui est admis.

### Partie I

1. Démontrer que

(a)  $L^2 = \overline{E}$ ,

(b)  $L^2 = \overline{\mathcal{C}_c^k}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

2. On définit pour  $u \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \tilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} u(y) dy$ .

(a) Démontrer que pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2} dx$  existe et que  $I(\alpha) = \pi|\alpha|$ .

(b) Démontrer que  $\forall (u, v) \in E^2, (\tilde{u}|\tilde{v}) = (u|v)$ .

3. Conclure qu'il existe une application  $\Theta :$

$$L^2 \mapsto L^2,$$

$$u \mapsto \hat{u}$$

telle que :

i)  $\forall u \in E, \hat{u} = \tilde{u}$ ,

ii)  $\forall (u, v) \in (L^2)^2, (\hat{u}|\hat{v}) = (u|v)$  et  $\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$ .

4. (a) Montrer que  $\forall u \in L^2 \cap L^1$ , il existe une suite  $(u_n) \in E$  et  $U \in L^1$  telle que, lorsque  $n$  tend vers l'infini,

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2, \quad u_n \rightarrow u \text{ dans } L^1,$$

et pour presque tout  $x$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n(x)| \leq |U(x)|$ .

(b) Montrer que  $\forall u \in L^2 \cap L^1$ ,

$$\widehat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} u(y) dy$$

pour presque tout  $x$ .

Ainsi si  $u \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^1$ , la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} u(y) dy$$

est un représentant noté désormais  $\widehat{u}$  de  $\Theta(u) \in L^2$ .

(c) Démontrer que pour  $u \in E$ ,  $\widehat{\widehat{u}}(x) = u(-x)$  pour presque tout  $x$ .

On pourra dériver  $f_n(x) = \int_n^n e^{-2i\pi xy} \widehat{u}(y) dy$  où  $u$  est la fonction caractéristique d'un intervalle  $[a, b]$ , et étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x_1) - f_n(x_2))$ .

En déduire que pour  $u \in L^2$ ,  $\widehat{\widehat{u}}(x) = u(-x)$  pour presque tout  $x$ .  
On pourra utiliser la question I.1a).

## Partie II

1. (a) Pour  $u_0 \in L^2$ , démontrer qu'il existe une fonction  $u(t) \in L^2$  définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x \mapsto u(t, x) \text{ telle que } \forall y \in \mathbb{R}$$

$$u(0)(y) = u_0(y), \quad (1)$$

$$\widehat{u(t)}(y) = e^{-i4\pi^2 ty^2} \widehat{u_0}(y). \quad (2)$$

On notera  $u(t, x) = u(t)(x)$  pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ .

(b) Démontrer que  $J = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ix^2} dx$  existe et calculer sa valeur.

On utilisera pour cela, l'application  $h : z \mapsto e^{-z^2}$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , et le théorème des résidus après l'avoir énoncé. On rappelle que  $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

(c) Montrer que si  $u_0 \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$ , alors  $u_0 \in L^2 \cap L^1$  et  $\widehat{u_0} \in L^2 \cap L^1$ .

(d) Démontrer que pour tout  $u_0 \in L^2 \cap L^1$  et  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{i(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi it)^{1/2}} u_0(z) dz, \quad (3)$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour une définition de  $(4\pi it)^{1/2}$  que l'on précisera.

De même que précédemment on supposera à partir de maintenant la relation (3) vraie pour tout  $x$ .

Dans la suite du problème, on dira qu'une fonction

$$\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C},$$

$$(t, x) \mapsto u(t, x),$$

est solution de (S) sur  $\mathbb{R}$  si et seulement s'il existe  $u_0 \in L^2$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u(t) : x \mapsto u(t, x)$  vérifie les relations (1), (2) du II.1a). On notera que si  $u_0 \in L^2 \cap L^1$  alors pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ,  $u(t, x)$  vérifie la relation (3).

On dira que  $u_0$  est la donnée initiale de la solution  $u(t)$ . On considère, dans la suite de la partie II, une solution  $u(t, x)$  de (S) sur  $\mathbb{R}$ .

2. Calculer  $\|u(t)\|_{L^2}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . En déduire que pour une donnée initiale  $u_0 \in L^2$ , il existe une unique solution sur  $\mathbb{R}$  de (S) de donnée initiale  $u_0$ .
3. Exprimer la solution  $v(t, x)$  sur  $\mathbb{R}$  de l'équation (S) avec pour donnée initiale  $V_0(x)$  en fonction de  $u(t, x)$  dans les cas suivants :
  - i)  $V_0(x) = u_0(x - x_0)$  pour  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
  - ii)  $V_0(x) = \lambda_0^{1/2} u_0(\lambda_0 x)$  pour  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ .
4. (a) Pour  $c \in \mathbb{R}$ , montrer que  $v(t, x) = e^{icx - ic_1 t} u(t, x - c_2 t)$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation (S), où  $c_1$  et  $c_2$  sont des éléments de  $\mathbb{R}$  à définir en fonction de  $c$ . Exprimer dans ce cas  $v(0, x)$  en fonction de  $u_0(x)$ .
 

(b) Montrer que l'équation (S) admet une solution sur  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$  la relation  $v(t, x) = \frac{1}{(it)^{1/2}} e^{i\frac{x^2}{4t}} \bar{u}\left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right)$  pour une condition initiale  $v_0(x) = v(0, x)$  qui sera exprimée à l'aide de  $\hat{u}_0$ . On commencera par écrire pour  $u_0 \in L^2 \cap L^1$ ,  $\bar{u}\left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right)$  en utilisant la formule (3).

### Partie III

Le but de cette section est de démontrer que si  $u(t, x)$  est solution de (S) sur  $\mathbb{R}$ , alors  $u(t, x) \in L^6(\mathbb{R}^2)$  et il existe une constante universelle  $C(S)$  telle que

$$\forall u_0 \in L^2, \int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^6 dx dt \leq C(S) \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx \right\}^3.$$

Dans cette partie,  $u(t, x)$  désigne une solution de (S) sur  $\mathbb{R}$  et  $u_0$  sa donnée initiale.

1. Donner un exemple explicite d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R},$$

$$(t, x) \mapsto f(t, x),$$

telle que

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2), \quad f \in L^6(\mathbb{R}^2),$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f(t, x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} f(0, x)^2 dx.$$

On suppose dans les questions 2), 3), 4) que  $\hat{u}_0 \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ .

2. Démontrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x)|^6 dx dt = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i4\pi^2 t(\xi^2 + \eta^2) + i2\pi x(\xi + \eta)} \hat{u}_0(\xi) \hat{u}_0(\eta) d\xi d\eta \right|^3 dx dt.$$

3. Démontrer qu'il existe une constante  $C_1$  indépendante de  $u$ , telle que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x)|^6 \right)^{1/2} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{u}_0(\xi)|^{3/2} |\widehat{u}_0(\eta)|^{3/2}}{|\xi - \eta|^{1/2}} d\xi d\eta.$$

On utilisera sans le démontrer le résultat suivant : si une fonction  $H \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ , on définit

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \widehat{H}(y_1, y_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(y_1 u + y_2 v)} H(u, v) du dv,$$

et si  $H \in L^{3/2}(\mathbb{R}^2)$  alors  $\widehat{H} \in L^3(\mathbb{R}^2)$  et il existe une constante universelle  $C_2$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{H}(y_1, y_2)|^3 dy_1 dy_2 \leq C_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |H(u, v)|^{3/2} du dv \right\}^2.$$

4. En conclure que si  $u(t, x)$  est solution de  $(S)$  sur  $\mathbb{R}$  (toujours avec  $\widehat{u}_0 \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ ), alors  $u(t, x) \in L^6(\mathbb{R}^2)$  et il existe une constante universelle  $C(S)$  telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x)|^6 dx dt \leq C(S) \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx \right\}^3.$$

On utilisera sans le démontrer le fait suivant : pour une fonction  $w \in L^2(\mathbb{R})$ , il existe une constante universelle  $C_3$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|w(\eta)|^{3/2}}{|\xi - \eta|^{1/2}} d\eta \right)^4 d\xi \leq C_3 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |w(x)|^2 dx \right\}^3.$$

5. On admet que le résultat de la question III.4 s'étend au cas où  $u_0 \in L^2$ .

En appliquant l'estimation obtenue dans III.4 à la fonction  $v(t, x)$  définie dans la question I.4b), obtient-on une estimation différente pour

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x)|^6 dx dt ?$$

## Partie IV

1. (a) On suppose que  $u_0 \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$ . Démontrer que si  $u(t, x)$  désigne la solution de  $(S)$  sur  $\mathbb{R}$  associée à la donnée initiale  $u_0$ , on a les propriétés suivantes :

$$u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad u(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),$$

$$\text{et } \forall (t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où  $u(t) : x \mapsto u(t, x)$ .

(b) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)$  existe dans  $L^2$  et donner cette limite.

Par extension dans la suite du problème, on dira que pour  $T > 0$  une fonction

$$[0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C},$$

$$(t, x) \mapsto u(t, x),$$

est solution sur  $[0, T]$  de (N) si et seulement si

$$u \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}), \forall t \in [0, T], u(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

$$\text{et } \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^4 u,$$

où, pour  $t \in [0, T]$ ,  $u(t)$  désigne l'application

$$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$$

$$x \mapsto u(t, x).$$

La fonction définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par la relation  $u_0(x) = u(0, x)$  est par définition dans ce cas la donnée initiale de la solution  $u(t)$ . On admet que pour tout  $T > 0$  et  $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  donnés, toute solution de (N) sur  $[0, T]$  associée à  $u_0$  si elle existe, est unique.

2. Exhiber une fonction explicite à valeurs réelles  $Q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  telle que

$$Q \neq 0, Q \in L^2(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, Q'' + Q^5 = Q,$$

où  $Q''$  désigne la dérivée seconde de  $Q$ . On cherchera  $Q(x)$  sous la forme  $\frac{\alpha}{(\cosh(\beta x))^\gamma}$  où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes réelles à déterminer.

3. Démontrer que la fonction définie pour  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  par

$$P(t, x) = e^{it} Q(x)$$

est une solution de (N) sur  $\mathbb{R}$ .

4. Soit  $T > 0$ ; on définit la fonction  $S(t, x)$  pour  $(t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}$  par la relation suivante

$$S(t, x) = \frac{1}{(T-t)^{1/2}} e^{-\frac{i}{(t-T)} + i \frac{x^2}{4(t-T)}} Q\left(\frac{x}{t-T}\right).$$

(a) Démontrer que  $S$  est une solution de (N) sur  $[0, T[$ .

(b) Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction  $S(t, x)$  admet-elle une limite finie quand  $t$  tend vers  $T$  ?

5. Démontrer qu'il existe  $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  telle que (N) n'admette pas de solution sur  $\mathbb{R}$  ayant  $u_0$  pour donnée initiale.

6. (a) Pour  $T > 0$  et  $\lambda > 0$ , démontrer que si  $u(t, x)$  est une solution de (N) sur  $[0, T]$ , alors  $\lambda^{1/2} u(\lambda^2 t, \lambda x)$

est une solution de (N) sur  $[0, \frac{T}{\lambda^2}]$ .

(b) On dira que la solution  $P(t, x)$  est *stable dans  $L^2$*  si et seulement si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , tel que  $\int_{\mathbb{R}} |P(0, x) - u_0(x)|^2 dx \leq \delta$ , alors il existe une solution de (N) sur  $\mathbb{R}$ ,  $u(t, x)$  de donnée initiale  $u_0$ , telle que,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} |P(t, x) - u(t, x)|^2 dx \leq \varepsilon.$$

Démontrer que la solution  $P(t, x)$  n'est pas stable dans  $L^2$ .