Agrégation de Mathématiques 2000 - Concours Externe

Mathématiques Générales

Pour deux entiers $t, u \geq 1$, on notera $\mathbb{M}_{t,u}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathbb{M}_t(\mathbb{C})$) l'espace des matrices à t lignes et u colonnes (resp. carrées à t lignes) à coefficients dans $\mathbb{C}$, munis de leur topologies habituelles. Pour q entier, on notera I_q la matrice identité $q \times q$. Pour un entier $n \geq 1$ et un sous-groupe S de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$, on notera $\mathrm{Ad}\ g(X)$ le conjugué gXg^{-1} de $X \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par $g \in S$, et $\mathrm{Ad}\ (S)X = \{\mathrm{Ad}\ g(X), g \in S\}$.

Dans tout le problème on notera M le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ formé des matrices blocs $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{bmatrix}$ où $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$; on remarquera qu'il est isomorphe à $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ symétriques complexes et $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ alternées (ou antisymétriques) complexes.

I

1. Montrez que le groupe M opère sur $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$) par l'action $(g, X) \mapsto {}^tA^{-1}XA^{-1}$ où $g = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{bmatrix} \in M$ et $X \in \mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$).

   Deux matrices, dans la même orbite pour l'action précédente, sont dites congrues.

2. Déterminez les orbites X_i pour cette action.
3. Si Ω est l'une de ces orbites, déterminez l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\mathcal{S}$ au moyen des orbites X_i.

On utilisera pas dans la suite du problème les propriétés topologiques de cette adhérence ni de celle définie en **II 3)**.

II

On posera $J_r = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{bmatrix}$, r entier positif, avec la convention, si $r = 0$, que $I_0 = 0$ et donc $J_0 = 0$.

1. Montrez que toute matrice alternée complexe $n \times n$ de rang $2r$ est congrue à une matrice bloc $\begin{bmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   On pourra montrer d'abord que la matrice d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée est, dans une certaine base, une diagonale de blocs 2×2 : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. Déterminez les orbites Y_j de M dans l'action sur $\mathcal{A}$ pour la congruence.
3. Si Ω est l'une des orbites précédentes, déterminez l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\mathcal{A}$.

III

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et L, L' deux sous-espaces supplémentaires de dimension n, $E = L \oplus L'$. On choisit des bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de L et $(e_{-1}, e_{-2}, \ldots, e_{-n})$ de L' et l'on définit sur E une forme bilinéaire symétrique, notée $(\ ,\ )$, pour laquelle L et L' sont des sous-espaces totalement isotropes tels que $(e_i, e_j) = \delta_{-i,j}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = -1, -2, \ldots, -n$ où δ est le symbole de Kronecker.

1. Ecrire la matrice P de la forme bilinéaire $(\ ,\ )$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_{-n})$ de E.

   On note G^s le groupe des matrices q complexes $2n \times 2n$, telles que ${}^tqPq = P$, et $\mathcal{G}^\sigma$ l'espace des matrices z complexes $2n \times 2n$, qui vérifient $P^tz + zP = 0$.

2. Monrez que $\mathcal{G}^\sigma$ est stable pour la conjugaison par les matrices de G^s.

3. Décrire la forme des matrices blocs 2×2 qui appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^\sigma$.

IV

Soient F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et U, U' deux sous-espaces supplémentaires de dimension n, $F = U \oplus U'$. On choisit des bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de U et $(e_{-1}, e_{-2}, \dots, e_{-n})$ de U' et l'on définit sur F une forme bilinéaire alternée, notée $< \ | \ >$, dont la matrice dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{-1}, e_{-2}, \dots, e_{-n})$ est J_n.

On notera G^a le groupe des matrices q inversibles $2n \times 2n$ telles que ${}^tqJ_nq = J_n$.

1. Quelles relations nécessaires et suffisantes doivent vérifier $A, B, C, D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ pour que la matrice bloc

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

   appartienne à G^a ?

2. Montrez que G^a laisse stable pour la conjugaison l'espace $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ des matrices blocs

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix}$$

   où $A, B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et $B, C \in \mathcal{S}$.

V

On définit les sous-espaces suivants de $\mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$:

$$\underline{\mathcal{M}} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{bmatrix}, A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\underline{r}_a^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, C = -{}^tC \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\} \quad \underline{r}_s^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, C = {}^tC \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\underline{r}_a^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = -{}^tB \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\} \quad \underline{r}_s^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = {}^tB \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\underline{p}_\lambda^+ = \mathcal{M} \oplus \underline{r}_\lambda^+ \quad \text{où} \quad \lambda = s \text{ ou } a$$

$$\underline{p}_\lambda^- = \mathcal{M} \oplus \underline{r}_\lambda^- \quad \text{où} \quad \lambda = s \text{ ou } a$$

On notera $\pi_{+,a}$ la projection de $\mathcal{G}^\sigma$ sur $\underline{r}_a^+$ parallèlement à $\underline{p}_a^-$ et $\pi_{+,s}$ la projection de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ sur $\underline{r}_s^+$ parallèlement à $\underline{p}_s^-$.

1. (a) Montrez que le groupe M opère par la conjugaison sur chacun des espaces $\underline{r}_\lambda^+$, $\lambda = s$ ou a.

   (b) Déduire de (a) que l'application η_a (resp. η_s) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \mapsto C$ est une bijection linéaire de $\underline{r}_a^+$ (resp. $\underline{r}_s^+$) sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{S}$) qui transforme l'opération de conjugaison de M en l'action de M définie en **I 1)**.

   On identifiera les orbites X_i (resp. Y_j) aux sous-ensembles correspondant par η_a^{-1} (resp. η_s^{-1}) de $\underline{r}_a^+$ (resp. $\underline{r}_s^+$).

2. On note $\mathbb{O}_k^a$ (resp. $\mathbb{O}_k^s$) l'ensemble des éléments z de $\mathcal{G}^\sigma$ (resp. $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$) de rang $2k$ (resp. de rang k) tels que $z^2 = 0$. Vérifiez que $\mathbb{O}_k^a$ (resp. $\mathbb{O}_k^s$) est stable sous l'action de conjugaison de G^s (resp. G^a).

   On note, pour k entier ≥ 1, V_k^a (resp. V_k^s) l'ensemble des $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix} \in \mathbb{O}_k^a$ (resp. $\mathbb{O}_k^s$) vérifiant l'inégalité rang $C \leq 2(k-1)$ (resp.$\leq k-1$).

3. On pose $R^{-,s} = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \ , \ T \in \mathcal{S} \right\}$, $R^{-,a} = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \ , \ T \in \mathcal{A} \right\}$.

   (a) Vérifiez que $R^{-,s}$ (resp. $R^{-,a}$) est un sous-groupe de G^a (resp. G^s) et qu'il en est ainsi de

   $$P^s = MR^{-,s} = \{ZY; Z \in M, Y \in R^{-,s}\} \ \ (\text{resp. } P^a = MR^{-,a})$$

   (b) Démontrez que V_k^a est stable par l'action de P^a et que V_k^s est stable par l'action de P^s.

VI

1. (a) Soit $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix} \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$, $1 \leq r =$ rang B, $1 \leq u =$ rang C. Montrez qu'il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in M$ tels que Ad $\gamma_1(z) = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & -{}^tA' \end{bmatrix}$ avec $B' = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Ad $\gamma_2(z) = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & -{}^tA'' \end{bmatrix}$ avec $C'' = \begin{bmatrix} I_u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) On introduit pour un entier $r \geq 1$, la matrice $K_r = \sqrt{-1}\ J_r$; vérifiez que $K_r^{-1} = K_r$.

   Démontrez un résultat parallèle à celui de **VI 1)(a)** faisant intervenir K_r, où $z \in \mathcal{G}^\sigma$ et $2r =$ rang B, $2u =$ rang C.

2. (a) Soit $w = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \in V_k^s$ où $D' = -{}^tA'$. On suppose dans cette question que B' est de la forme $\begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $c \geq 0$. Montrez que A', C' et D' sont des matrices blocs de la forme suivante:

   $$A' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \ \text{ où } A_1 \text{ est une matrice } c \times c, \ {}^tA_1 = A_1, \ \ , A_4^2 = 0 \ ;$$

   $$C' = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \ \text{ où } C_1 = -A_1^2 \ \ , C_2 = -(A_1A_2 + A_2A_4), \ \ C_3 = D_3A_1 - D_4D_3 \ ;$$

   $$D' = -{}^tA' = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix} .$$

   (b) Démontrez le résultat parallèle à **VI 2) (a)** pour $w \in V_k^a$ et $B' = \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, où A_1 est une matrice $2c \times 2c$, ${}^tA_1 = -J_cA_1J_c$, $A_4^2 = 0$;

   $$C' = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}, \ \ \text{où } \ C_1 = -K_cA_1^2, \ \ C_2 = -K_c(A_1A_2 + A_2A_4), \ \ C_3 = D_3K_cA_1 - D_4D_3K_c \ ;$$

   $$D' = \begin{bmatrix} -K_cA_1K_c & 0 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix} .$$

3. (a) Soient $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in V_k^s$ et $\gamma \in M$; on pose Ad γ $(z) = w = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ et l'on suppose que $B' = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $c =$ rang $B \geq 1$.

En écrivant w comme dans la question **VI 2) (a)** sous la forme de blocs 4×4 on a

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & I_c & 0 \\ 0 & A_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & -A_1 & 0 \\ C_3 & C_4 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

Démontrez que $c = k$ si et seulement si $A_4 = D_4 = C_4 - D_3 A_2 = 0$.

(b) Démontrez le résultat parallèle à celui de **VI 3) (a)** pour $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in V_k^a$, $B' = \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $2c = \text{rang } B$.

VII

On pose, pour $k \geq 1$

$$W_k^s = \left\{ z \in V_k^s, z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ où rang } B = k \right\}$$

$$W_k^a = \left\{ z \in V_k^a, z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ où rang } B = 2k \right\}$$

On se propose, dans cette question, de démontrer que pour tout $z \in V_k^s$, il existe $\gamma \in P^s$ tel que $w = \text{Ad}\,\gamma\,(z)$ appartient à W_k^s. Pour celà, l'on choisit parmi les éléments de $\text{Ad}\,(P^s)\,z$ un élément $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ de $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ tel que le rang c de B soit maximum; on va raisonner ensuite par l'absurde en supposant $c < k$ et aboutir à une contradiction.

1. Montrez que l'on peut supposer que

$$B = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c \geq 0$$

On va utiliser dans la suite des matrices $\gamma \in R^{-,s}$ de la forme $\gamma = \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T' \end{bmatrix}$, où T' est une matrice symétrque $(n-c) \times (n-c)$ telle que $n - c$ soit supérieur ou égal à 1.

2. En conjuguant z par une telle matrice γ et utilisant les notations de **VI 3) (a)** montrez que

$$\text{Ad}\,(\gamma)\,z = \begin{bmatrix} A + TC & E \\ C & D - CT \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad E = \begin{bmatrix} I_c & -A_2 T' \\ T' D_3 & T' D_4 - A_4 T' - T' C_4 T' \end{bmatrix}$$

et montrez que la maximalité du rang de B implique que $F = T' D_4 - A_4 T' - T'(C_4 - D_3 A_2) T'$ est nulle.

3. (a) En supposant que $A_4 \neq 0$, montrez l'existence d'une matrice inversible g et d'une matrice (éventuellemnt vide) H telles que

$$g A_4 g^{-1} = \begin{bmatrix} E_{12} & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et vérifiez que $n - c \geq 2$.

(b) En déduire, en prenant $T' = g^{-1} \begin{bmatrix} E_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} {}^t g^{-1}$ et en posant $Y = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} g$ où $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que $YT' = 0$, $YF = -Y A_4 T'$.

(c) En déduire une contradiction avec le fait que $A_4 \neq 0$.

(d) Montrez qu'il en résulte que $A_4 = 0$ et $D_4 = 0$.

4. En choisissant convenablement la matrice T', montrez que $X = C_4 - D_3 A_2$ est nulle et conclure.

VIII

Si $2 \leq 2k \leq n-1$, adaptez la preuve de **VII** de façon à prouver que pour tout $z \in V_k^a$ il existe $\gamma \in P^a$ tel que $w = \mathrm{Ad}\ \gamma\ (z)$ appartient à W_k^a.

IX

Soit $k \geq 1$. On notera V_k pour V_k^a ou V_k^s et l'on désignera par $\tilde{k}$ le nombre k si $V_k = V_k^s$ et le nombre $2k$ si $V_k = V_k^a$. Démontrez que si

$$z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

appartient à V_k, alors rang $A < \tilde{k}$.

Les résultats des parties **VII, VIII, IX** *interviennent dans la classification de certaines représentations d'algèbres de Lie.*