J. 4431

77.0.2
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2001

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse et probabilités

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Le but de ce problème est l'étude d'une équation intégro-différentielle, le problème de Milne-Schwarzschild (MSa-b) ci-dessous, qui intervient en Astrophysique pour décrire la diffusion de la lumière dans les atmosphères stellaires. Parallèlement, le problème fait étudier une méthode de résolution, due à Wiener et Hopf, pour une classe d'équations intégrales reliées au problème de Milne-Schwarzschild, dont l'exemple typique est le problème (WH) ci-dessous.

La partie II peut être résolue sans faire appel aux résultats de la partie I, mais en utilisant la définition de la fonction K donnée avant la question I 2] a), définition qui fait elle-même appel à la fonction Ei du I 1] a). De même les questions IV 1] à IV 6] incluses peuvent être résolues sans faire appel aux questions précédentes. Enfin les questions V 1] à V 2] b) incluses ne font appel qu'aux résultats des questions IV 1] à IV 6] incluses.

Notations et rappels.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les fonctions considérées dans ce problème sont à valeurs dans $\mathbf{C}$.

1) Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on note $\operatorname{Re} z$ sa partie réelle et $\operatorname{Im} z$ sa partie imaginaire.

2) Pour tout $f \in L^1(\mathbf{R})$, on note $\hat{f}$ sa transformée de Fourier, définie pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx\,.$$

On notera également $\hat{g}$ la transformée de Fourier d'un élément g de $L^2(\mathbf{R})$, définie par prolongement continu de la transformée de Fourier sur $L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$. On rappelle que l'objet $\hat{g}$ ainsi défini est un élément de $L^2(\mathbf{R})$; en particulier $\hat{g}$ s'identifie à une fonction Lebesgue-mesurable définie presque partout.

3) Pour tout $r > 0$, on notera

$$S(r) = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |\operatorname{Im} z| < r\}\,, \quad \overline{S}(r) = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |\operatorname{Im} z| \leq r\}\,.$$

On notera également, pour tout $r \in \mathbf{R}$,

$$\mathcal{P}_r^+ = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \operatorname{Im} z > r\}\,, \quad \mathcal{P}_r^- = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \operatorname{Im} z < r\}\,,$$

et

$$\overline{\mathcal{P}}_r^+ = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \operatorname{Im} z \geq r\}\,, \quad \overline{\mathcal{P}}_r^- = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \operatorname{Im} z \leq r\}\,.$$

4) On notera $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions f définies presque partout sur $\mathbf{R}$ et Lebesgue-mesurables telles que, pour tout $R > 0$,

$$\int_{-R}^{R} |f(x)|dx \text{ soit finie.}$$

5) On notera ln la détermination principale du logarithme népérien, c'est-à-dire l'unique fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ prolongeant la fonction logarithme népérien définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

6) Etant donnés deux points z_1 et z_2 du plan complexe et une fonction f intégrable sur le segment $[z_1, z_2]$, la notation

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \text{ désigne le nombre } (z_2 - z_1) \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2)dt\,.$$

7) Etant donnés $a \in \mathbf{R}$ et une fonction f localement intégrable sur la droite d'équation $\operatorname{Im} z = a$, la notation

$$\int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} f(z)dz \text{ désigne } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+ia)dt\,,$$

lorsque cette dernière intégrale impropre converge.
8) On rappelle un énoncé du *théorème de Fubini*: soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction borélienne sur $\mathbf{R}^2$. Alors,

• pour tout $x \in \mathbf{R}$ (resp. pour tout $y \in \mathbf{R}$) la fonction $f(x,\cdot) : y \mapsto f(x,y)$ (resp. $f(\cdot,y) : x \mapsto f(x,y)$) est borélienne;

• les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $[0,+\infty]$

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|dx$$

sont boréliennes.

De plus, si

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|dy \right) dx < +\infty\,,$$

ou bien si

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|dx \right) dy < +\infty\,,$$

alors f définit un élément de $L^1(\mathbf{R}^2)$, les fonctions définies p.p. sur $\mathbf{R}$

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx$$

définissent des éléments de $L^1(\mathbf{R})$ et l'on a

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx \right) dy = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy\,.$$

Tournez la page S.V.P.

I

1] a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, les intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$$

convergent et sont égales. Dans la suite du problème, on notera $\mathrm{Ei}(x)$ la quantité ainsi définie.

1] b) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$

converge. Montrer que, lorsque $x \to 0^+$, $\mathrm{Ei}(x) + \ln x$ converge vers une limite finie que l'on calculera en fonction de I et $\mathrm{Ei}(1)$. (On pourra exprimer $\ln x$ sous la forme d'une intégrale).

1] c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $0 < \mathrm{Ei}(x) < \dfrac{e^{-x}}{x}$.

1] d) Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ que l'on demande de calculer telle que, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{Ei}(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} + O\left(\frac{e^{-x}}{x^{N+2}}\right),$$

pour $x \to +\infty$. (On pourra intégrer par parties).

1] e) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Ei} \in L^p(\mathbf{R}_+^*)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

On note dans la suite du problème K l'application définie sur $\mathbf{R}^*$ par

$$x \mapsto K(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Ei}(|x|)$$

et $\hat{K}$ la transformée de Fourier de K.

2] a) Justifier que la fonction $\hat{K}$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, appartenant à $L^2(\mathbf{R})$. Déterminer $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \hat{K}(\xi)$.

2] b) Montrer que la fonction $\hat{K}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $S(1)$ (encore notée $\hat{K}$ dans la suite du problème).

2] c) Montrer que, pour tout $\eta \in]-1, 1[$, l'application $\xi \mapsto \hat{K}(\xi + i\eta)$ appartient à $L^2(\mathbf{R})$.

2] d) Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^*$, $\hat{K}(\xi) = \dfrac{C}{\xi} \operatorname{Arctan} \xi$ où C est une constante que l'on demande de calculer. Calculer également $\hat{K}(0)$.

3] a) Donner un équivalent de $1 - \hat{K}(z)$ pour $z \to 0$.

3] b) Montrer que, pour tout $z \in S(1)$, l'on a

$$\hat{K}(z) - \overline{\hat{K}(z)} = \int_1^{+\infty} \frac{\overline{z}^2 - z^2}{|t^2 + z^2|^2} dt$$

(On pourra considérer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + z^2}$ pour tout $z \in S(1)$).

En déduire que $\hat{K}(z)$ est réel si et seulement si z est soit réel, soit imaginaire pur de module strictement inférieur à 1.

3] c) Montrer que 0 est le seul zéro de $1 - \hat{K}$ dans $S(1)$. (On pourra commencer par étudier le sens de variation sur $]-1, +\infty[$ de la fonction $\alpha \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \alpha}$.)

II

On considère dans cette partie l'équation intégrale d'inconnue $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) f(y) dy\,, \quad \text{p.p. en } x \in \mathbf{R}\,, \qquad (EI)$$

où f est une fonction telle que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, $y \mapsto K(x-y)f(y)$ définit un élément de $L^1(\mathbf{R})$.

1] Montrer que toute fonction affine sur $\mathbf{R}$ est solution de (EI).

2] a) Soient F et G deux éléments de $L^1(\mathbf{R})$. Montrer que la fonction ϕ définie pour presque tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par $\phi(x, y) = F(x-y)G(y)$ appartient à $L^1(\mathbf{R}^2)$; en déduire que l'expression

$$F \star G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-y)G(y) dy$$

existe pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ et définit un élément $F \star G$ de $L^1(\mathbf{R})$. Montrer enfin que

$$\|F \star G\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \|F\|_{L^1(\mathbf{R})} \|G\|_{L^1(\mathbf{R})} \,.$$

2] b) Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, l'on a $\widehat{F \star G}(\xi) = \hat{F}(\xi)\hat{G}(\xi)$.

3] a) Soient $F \in L^1(\mathbf{R})$ et $G \in L^2(\mathbf{R})$. Montrer que l'expression

$$F \star G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-y)G(y) dy$$

existe pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ et définit un élément $F \star G$ de $L^2(\mathbf{R})$. Montrer que

$$\|F \star G\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|F\|_{L^1(\mathbf{R})} \|G\|_{L^2(\mathbf{R})} \,.$$

(On pourra chercher à appliquer le résultat de la question II 2] a) aux fonctions $|F|$ et $|G|^2$).

3] b) Montrer que, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$, l'on a $\widehat{F \star G}(\xi) = \hat{F}(\xi)\hat{G}(\xi)$. Cette relation a-t-elle lieu pour tout $\xi \in \mathbf{R}$?

4] Trouver toutes les solutions de (EI) appartenant à $L^1(\mathbf{R})$.

5] Trouver toutes les solutions de (EI) appartenant à $L^2(\mathbf{R})$.

III

On considère dans cette partie le problème suivant

"Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}_+$ telles que, pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = O(e^{ax})$ lorsque $x \to +\infty$ et

$$f(x) = \int_0^{+\infty} K(x-y)f(y)dy\,, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}_+ \text{."} \qquad (WH)$$

Dans toute cette partie, on suppose que le problème (WH) admet au moins une solution non identiquement nulle, que l'on note f. *On raisonnera dans toute cette partie par conditions nécessaires sur f; l'existence d'une telle solution sera vérifiée plus loin (partie IV).*

1] a) Pour tout $\beta \in \mathbf{R}$, on définit les fonctions F_β, G_β et K_β par

$$F_\beta(x) = e^{-\beta x} f(x) \text{ si } x \geq 0\,, \quad F_\beta(x) = 0 \text{ si } x < 0\,,$$

$$G_\beta(x) = 0 \text{ si } x \geq 0\,, \quad G_\beta(x) = -e^{-\beta x}\int_0^{+\infty} K(x-y)f(y)dy \text{ si } x < 0\,,$$

$$K_\beta(x) = e^{-\beta x}K(x)\,, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^*\,.$$

Montrer que $G_0(x) = O(e^{-|x|})$ lorsque $x \to -\infty$.

1] b) Montrer que, pour tout $\beta \in]0,1[$, F_β, G_β et $K_\beta \in L^1(\mathbf{R})$, et que $F_\beta - K_\beta \star F_\beta = G_\beta$.

2] a) Montrer que l'intégrale $\phi(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-izx} f(x)dx$ converge pour tout $z \in \mathcal{P}_0^-$ et définit une fonction holomorphe sur $\mathcal{P}_0^-$.

2] b) Expliciter une relation entre $\hat{F}_\beta$ et ϕ, pour tout $\beta \in]0,1[$.

2] c) Montrer que $\hat{G}_0$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{P}_{-1}^+$ (encore notée $\hat{G}_0$).

2] d) Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{P}_{-1}^+ \cap \mathcal{P}_0^-$, l'on a $\phi(z)(1-\hat{K}(z)) = \hat{G}_0(z)$.

3] a) On pose, pour tout $z \in S(1) \setminus \{0\}$, $A(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2}(1-\hat{K}(z))$. Montrer que A se prolonge en une fonction holomorphe sans zéros sur $S(1)$, encore notée A dans la suite du problème et que, lorsque $|z| \to +\infty$ avec $|\operatorname{Im} z| < 1$, l'on a $|A(z)-1| = O(\dfrac{1}{|z|})$.

3] b) Déterminer l'image par A de l'axe réel. (On pourra se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction).

3] c) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$A(\overline{S}(\alpha)) \subset \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } \operatorname{Re} z > \tfrac{1}{6}\}.$$

On gardera cette valeur de α jusqu'à la fin de la partie III.

4] a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\int_{R-i\alpha}^{R+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z}dt \to 0\,, \text{ et que } \int_{-R-i\alpha}^{-R+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z}dt \to 0$$

lorsque $R \to +\infty$.

4] b) Montrer que les fonctions A_+ et A_- définies par les formules

$$A_+(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z}dt\right)$$

et

$$A_-(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z}dt\right)$$

sont holomorphes sur $\mathcal{P}^+_{-\alpha}$ et $\mathcal{P}^-_{\alpha}$ respectivement. Déterminer les zéros de A_+ et A_-.

4] c) Montrer que, pour tout $z \in S(\alpha)$, l'on a $A(z) = \dfrac{A_+(z)}{A_-(z)}$.

5] Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et soit Φ une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ telle que $|\Phi(z)| = o(|z|^{N+1})$ lorsque $|z| \to +\infty$. Montrer que Φ est un polynôme de degré au plus N.

Soit donc f solution du problème (WH), ϕ et G_0 étant les fonctions qui lui sont associées par les questions III 1] a) et III 2] a).

6] a) Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{P}^+_{-\alpha} \cap \mathcal{P}^-_0$,

$$\frac{(z+i)\hat{G}_0(z)}{A_+(z)} = \frac{z^2\phi(z)}{(z-i)A_-(z)}.$$

6] b) Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $z \in \mathcal{P}^-_0$, l'on ait

$$\phi(z) = C\frac{z-i}{z^2}A_-(z).$$

(On pourra commencer par montrer que la fonction définie par $H(z) = \dfrac{z^2\phi(z)}{(z-i)A_-(z)}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ telle que $|H(z)| = O(|z|)$ pour $|z| \to +\infty$).

Tournez la page S.V.P.

7] a) Soit f solution du problème (WH) et soit ϕ la fonction qui lui est associée par la question III 2] a). Montrer que, pour tout $\beta \in]0,1[$ et tout $x > 0$

$$f(x) = \int_{-\infty - i\beta}^{+\infty - i\beta} \phi(z) e^{izx} \frac{dz}{2\pi}\,.$$

7] b) Montrer que pour tout $\alpha' \in]0, \alpha[$

$$\int_{-\infty + i\alpha'}^{+\infty + i\alpha'} e^{izx} \frac{z-i}{z^2} A_-(z) dz = O(e^{-\alpha' x})$$

lorsque $x \to +\infty$.

7] c) Soit C la constante associée à ϕ par le III 6] b). Soit $\alpha' \in]0, \alpha[$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) - C \int_{-\infty + i\alpha'}^{+\infty + i\alpha'} e^{izx} \frac{z-i}{z^2} A_-(z) \frac{dz}{2\pi} = C(ax + b)$$

où a et b sont des constantes que l'on exprimera en fonction de $A_-(0)$ et $A'_-(0)$.

7] d) Soit $r \in]0, \alpha[$ et $\mathcal{C}^+(0, r)$ le demi-cercle orienté négativement centré en l'origine et de rayon r inclus dans $\mathcal{P}_0^+$. Montrer que

$$A_-(0) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \ln A(t) \frac{dt}{t} \right)\,.$$

En déduire la valeur numérique de $A_-(0)$.

7] e) Déduire de ce qui précède que le problème (WH) admet au plus une solution f telle que $f(x) \sim x$ lorsque $x \to +\infty$, ainsi que la formule exprimant $f(x)$.

On vérifiera dans la partie IV l'existence d'une fonction f vérifiant (WH) et la condition $f(x) \sim x$ lorsque $x \to +\infty$.

IV

Dans la suite du problème, on note $B = \mathbf{R}_+ \times ([-1,1] \setminus \{0\})$ et on pose

$$\mathcal{E} = \{u : B \to \mathbf{R} \mid \forall \mu \in [-1,1] \setminus \{0\},\ u(\cdot, \mu) \in C^1(\mathbf{R}_+) \text{ et } u \in L^\infty(B)\}\,.$$

Pour toute fonction $u \in \mathcal{E}$, on notera, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$< u > (x) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} u(x, \mu) d\mu\,.$$

Soit enfin $h :]0,1] \to \mathbf{R}$ appartenant à $L^\infty([0,1])$. On considère alors le problème

"Trouver toutes les fonctions $u \in \mathcal{E}$ telles que

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu) + u(x,\mu) - < u > (x) = 0\,, \quad x > 0\,,\ 0 < |\mu| \leq 1\,; \qquad (MSa)$$

$$u(0,\mu) = h(\mu)\,, \qquad 0 < \mu \leq 1\,.\text{"} \qquad (MSb)$$

Soit $u \in \mathcal{E}$ solution de (MSa-b).

1] a) Montrer que l'application $\mathcal{F}_u$ définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$x \mapsto \mathcal{F}_u(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu u(x,\mu)d\mu$$

est constante sur $\mathbf{R}_+$. (On notera désormais $\mathcal{F}_u$ cette constante).

1] b) On note $\mathcal{G}_u$ l'application définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$x \mapsto \mathcal{G}_u(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu^2 u(x,\mu)d\mu\,.$$

Calculer, pour tout $x \geq 0$, $\mathcal{G}_u(x)$ en fonction de $\mathcal{G}_u(0)$ et $\mathcal{F}_u$.

1] c) Montrer que la constante $\mathcal{F}_u$ est nulle et que l'application $\mathcal{G}_u$ est constante sur $\mathbf{R}_+$. (On notera désormais $\mathcal{G}_u$ cette constante).

2] a) On note $\mathcal{H}_u$ l'application définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$x \mapsto \mathcal{H}_u(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu u(x,\mu)^2 d\mu\,.$$

Montrer que l'application $\mathcal{H}_u$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

2] b) Montrer que l'application $(x,\mu) \mapsto u(x,\mu) - < u > (x)$ définit un élément de $L^2(B)$.

2] c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\mathcal{H}_u(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu |u(x,\mu) - < u > (x)|^2 d\mu\,.$$

2] d) Montrer que $\mathcal{H}_u(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

2] e) Montrer que

$$\| u - < u > \|^2_{L^2(B)} \leq C_1 \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu\,,$$

où C_1 est une constante que l'on précisera.

3] Montrer que le problème (MSa-b) admet au plus une solution dans $\mathcal{E}$ qui soit continue sur B.

Tournez la page S.V.P.

4] a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$u(x,\mu) = e^{-x/\mu}\, h(\mu) + \int_0^x e^{-(x-y)/\mu}\, \frac{1}{\mu} < u > (y)dy\,, \quad 0 < \mu \leq 1\,; \tag{1a}$$

$$u(x,\mu) = \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|}\, \frac{1}{|\mu|} < u > (y)dy\,, \quad -1 \leq \mu < 0\,. \tag{1b}$$

4] b) Soit $v \in \mathcal{E}$. Montrer que l'application $x \mapsto < v > (x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.
4] c) Montrer que le problème (MSa-b) admet au plus une solution dans $\mathcal{E}$.

On suppose dans les questions IV 5] a) à c) incluses que $h(\mu) \geq 0$ pour tout $\mu \in]0,1]$.
5] a) On définit une suite de fonctions $u_n : B \to \mathbf{R}$ par les relations de récurrence, valables pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1}(x,\mu) = e^{-x/\mu}\, h(\mu) + \int_0^x e^{-(x-y)/\mu}\, \frac{1}{\mu} < u_n > (y)dy\,, \quad 0 < \mu \leq 1\,,$$

$$u_{n+1}(x,\mu) = \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|}\, \frac{1}{|\mu|} < u_n > (y)dy\,, \quad -1 \leq \mu < 0\,,$$

et que l'on initialise en prenant pour u_0 la fonction nulle. Montrer que, pour tout $(x,\mu) \in B$,

$$0 \leq u_0(x,\mu) \leq u_1(x,\mu) \leq \ldots \leq u_n(x,\mu) \leq u_{n+1}(x,\mu) \leq \ldots \leq \|h\|_{L^\infty([0,1])}\,.$$

5] b) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $u_n(x,\mu)$ converge simplement sur B vers $u \in L^\infty(B)$ vérifiant les relations (1a-b).
5] c) Montrer que $u \in \mathcal{E}$ et que u est solution de (MSa-b).

On abandonne désormais l'hypothèse selon laquelle $h(\mu) \geq 0$ pour tout $\mu \in]0,1]$.
5] d) Montrer que, pour toute fonction $h :]0,1] \to \mathbf{R}$ satisfaisant $h \in L^\infty([0,1])$, le problème (MSa-b) admet une unique solution u appartenant à $\mathcal{E}$.

6] a) Déterminer les fonctions $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ appartenant à $L^\infty([-1,1])$ et telles que la fonction $v : (x,\mu) \mapsto x + g(\mu)$ vérifie

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x}(x,\mu) + v(x,\mu) - < v > (x) = 0\,, \quad x > 0\,,\ 0 < |\mu| \leq 1\,.$$

6] b) Montrer qu'il existe une unique fonction $w : B \to \mathbf{R}$ solution du problème suivant:

$$\mu \frac{\partial w}{\partial x}(x,\mu) + w(x,\mu) - < w > (x) = 0\,, \quad x > 0\,,\ 0 < |\mu| \leq 1\,; \tag{2a}$$

$$w(0,\mu) = 0\,, \qquad 0 < \mu \leq 1\,. \tag{2b}$$

l'application $(x,\mu) \mapsto w(x,\mu) - x$ définit un élément de $\mathcal{E}$. (2c)

6] c) Calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, l'intégrale $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu w(x,\mu) d\mu$.

7] a) Soit w la fonction définie au IV 6] b). Montrer que l'application $x \mapsto < w > (x)$ est l'unique solution du problème (WH) qui satisfasse en outre la condition $< w > (x) \sim x$ lorsque $x \to +\infty$.

7] b) Calculer, à l'aide de la fonction A du III, $w(0,-\mu)$ pour tout $\mu \in]0,1]$. Dans toute la suite, on notera $W(\mu)$ cette quantité.

V

Soit $h :]0,1] \to \mathbf{R}$ appartenant à $L^\infty([0,1])$, et soit u la solution du problème (MSa-b).

1] Montrer que, pour tout $\gamma \in [0,1[$

$$\int_0^{+\infty} \int_{-1}^{1} |u(x,\mu) - < u > (x)|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu \leq \frac{C_2}{(1-\gamma)} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu \,,$$

où C_2 est une constante que l'on déterminera.

2] a) Soit $l = 3 < \mu^2 u >$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$| < u > (x) - l|^2 \leq C_3 \int_{-1}^{1} |u(x,\mu) - < u > (x)|^2 d\mu \,,$$

où C_3 est une constante que l'on déterminera.

2] b) Montrer que, pour tout $\gamma \in [0,1[$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{-1}^{1} |u(x,\mu) - l|^2 e^{2\gamma x} dx d\mu \leq \frac{C_4}{(1-\gamma)} \int_0^1 \mu h(\mu)^2 d\mu \,,$$

où C_4 est une constante que l'on déterminera.

3] Exprimer l en fonction de W et de h. (On pourra considérer la fonction

$$x \mapsto \int_{-1}^{1} \mu w(x,-\mu) u(x,\mu) d\mu$$

où w la solution du problème (2a-c) introduit au IV 6] b).)

FIN