# Agrégation de Mathématiques 2001 - Concours Externe

Mathématiques Générales

### Prolégomènes

Dans tout le problème $n$ désigne un entier naturel strictement positif, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel euclidien canonique de dimension $n$. $\mathbb{R}^n$ est également canoniquement muni d'une structure d'espace affine. On choisit pour origine, notée $O$, le vecteur nul de l'espace vectoriel.

On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbb{R}^n$ et $\|x\|$ la norme euclidienne de $x$.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées de dimension $n$ inversibles et on note $\det(A)$ le déterminant de la matrice carrée $A$. Si $E$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ et $A$ une matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on note $A(E)$ l'image de $E$ par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$.

Si $E$ est une partie de $\mathbb{R}^n$, on appelle figure polaire de $E$ , notée $E^\star$, la partie de $\mathbb{R}^n$ formée des points $y$ tels que $\langle x, y\rangle$ est inférieur à 1 pour tout $x$ dans $E$:

$$E^\star = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in E, \langle x, y\rangle \leq 1\}\ .$$

On rappelle qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est convexe si, pour tout couple $(A, B)$ de ses points, elle contient le segment $[A, B]$. Une fonction $f$ d'une partie $E$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite convexe si $E$ est convexe et si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

(i.e. le graphe est sous ses cordes). On dit que $f$ est strictement convexe si elle est convexe et si l'inégalité précédente n'est une égalité que si $x = y$ ou $\lambda \in \{0, 1\}$. Enfin $f$ est dite (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Une partie $E$ de $\mathbb{R}^n$ est dite $O$-symétrique si elle est globalement invariante par la symétrie centrale (affine) de centre $O$. Si $\lambda$ est un scalaire, on note $\lambda E$ l'image de $E$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$.

On dit qu'une partie $E$ de $\mathbb{R}^n$ est un corps convexe si elle convexe et d'intérieur non vide. On remarquera qu'un corps convexe $O$-symétrique contient toujours $O$ dans son intérieur (car si $x$ est intérieur, il en est de même de $-x$ par symétrie et aussi de $(x + (-x))/2$ par convexité).

Enfin si $E$ est une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}^n$ on note $\mathrm{vol}(E)$ son volume.

Les deuxième et troisième parties sont indépendantes l'une de l'autre. Il est rappelé que la présentation, la rédaction et la précision sont des éléments importants d'appréciation des copies.

## Partie I - Généralités

Soit $K$ un corps convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ contenant $O$ dans son intérieur.

**Question 1**
Soient $K_0$ et $K_1$ des parties convexes de $\mathbb{R}^n$ et $\theta$ un réel dans $[0, 1]$; montrer que $K_\theta$ est convexe où on a noté

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x_0, x_1) \in K_0 \times K_1, x = (1-\theta)x_0 + \theta x_1\}\ .$$

**Question 2**
Soit $A$ une matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer $(A(K))^\star = {}^tA^{-1}(K^\star)$.

**Question 3**
Soit $x$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose $I_x = \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \lambda K\}$.
**3.a** Montrer que $I_x$ est un intervalle fermé non majoré de $\mathbb{R}_+$.
**3.b** On peut donc poser $j_K(x) = \inf I_x$; c'est un réel positif. Soit $\partial K$ la frontière de $K$. Montrer

$$x \in K \iff j_K(x) \leq 1 \ \text{ et } \ x \in \partial K \iff j_K(x) = 1\ .$$

**Question 4** (*étude d'exemples*)
**4.a** Expliciter $K^\star$, $j_K$ et $j_{K^\star}$ dans les trois cas suivants :
  **1.** $K$ est le disque unité (euclidien) de $\mathbb{R}^2$.
  **2.** $K$ est le carré $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1, x_1 \leq 1\}$.
  **3.** $K$ est un parallélogramme, dans $\mathbb{R}^2$, de centre $O$.

**4.b** Montrer que $K^\star$ est un corps convexe, compact, contenant $O$ dans son intérieur et

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, j_{K^\star}(y) = \max\{\langle x, y\rangle \mid x \in K\} \ .$$

**4.c** On suppose que $K$ est $O$-symétrique. Montrer que $j_K$ et $j_{K^\star}$ sont des normes. Que dire de $(\mathbb{R}^n, j_K)$ et $(\mathbb{R}^n, j_{K^\star})$ ?

**Question 5** (*Un résultat de dualité*)
On note $p_K$ la projection sur le convexe compact $K$.
**5.a** Soit $a$ n'appartenant pas à $K$ et $H$ l'hyperplan passant par $p_K(a)$ et orthogonal à la droite passant par $a$ et $p_K(a)$. Montrer qu'il existe une équation de la forme

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle = 1\}$$

pour un certain vecteur $u$ de $\mathbb{R}^n$, telle que $\langle a, u\rangle > 1$ et, pour tout point $x$ de $K$, $\langle x, u\rangle \leq 1$.

**5.b** Montrer $(K^\star)^\star = K$.

**Question 6** (*Projection d'un convexe*)
Soit $pr_H$ une projection (affine) de $\mathbb{R}^n$ d'image un hyperplan affine $H$ et de direction quelconque $D$ (une droite affine) non parallèle à $H$. On munit l'espace affine d'un repère (non nécessairement orthogonal) tel que $H$ soit l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ et $D$ la droite d'équation $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$.

Montre qu'il existe $\varphi_K$ et $\varphi^K$ des applications de $pr_H(K)$ dans $\mathbb{R}$ respectivement convexe et concave telles que $K$ soit l'ensemble des $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tels que $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ appartient à $pr_H(K)$ et

$$\varphi_K(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \varphi^K(x_1, \ldots, x_{n-1}) \ .$$

## Partie II - Géométrie des formes quadratiques

On appelle ellipsoide (sous-entendu centré en $O$) la boule unité pour une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Il revient au même de se donner une matrice symétrique définie positive $A$ et de considérer le sous-ensemble $E(A)$ de $\mathbb{R}^n$ des $x$ tels que $\langle x, Ax\rangle \leq 1$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des ellipsoides. En identifiant l'ellipsoide $E(A)$ aux coefficients $a_{i,j}$ de $A$ avec $i \leq j$, on considère $\mathcal{E}$ comme une partie de $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et on le munit de la topologie induite.

**Question 1** (*Ellipsoides et boules unités*)
Soit $A$ une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive telle que $B^2 = A^{-1}$. En déduire qu'un ellipsoide est l'image de la boule unité (euclidienne) par une application linéaire.

**Question 2** (*Ellipsoides et convexité*)
Montrer que l'application $A \mapsto (\det A)^{-1/2}$ de l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques définies positives dans $\mathbb{R}_+^\star$ est strictement convexe. (On pourra songer à considérer le logarithme.)

**Question 3**(*Ellipsoide maximal*)
Soit $K$ un corps convexe compact $O$-symétrique de $\mathbb{R}^n$.
**3.a** Soit $v$ un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_{K,v}$ des ellipsoides de $\mathbb{R}^n$ ayant un volume supérieur à $v$ et inclus dans $K$ est une partie compacte de $\mathcal{E}$.
**3.b** En déduire qu'il existe un unique ellipsoide $E_K$ de $\mathbb{R}^n$ inclus dans $K$ et de volume maximal pour cette propriété.

**Question 4** (*Formes quadratiques et corps convexes*)
**4.a** Soit $K$ un corps convexe compact $O$-symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathrm{Is}_K$ le groupe des automorphismes linéaires $u$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $u(K) = K$. Montre qu'il existe une forme quadratique $q_K$ définie positive invariante par $\mathrm{Is}_K$, i.e.

$$\forall u \in \mathrm{Is}_K, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_K(u(x)) = q_K(x) \ .$$

**4.b** Donner $E_K$ et une forme $q_K$ possible dans chacun des exemples de I.4.a .

## Partie III - Théorème de Brunn-Minkowski.

Soient $K_0$ et $K_1$ deux parties compactes de $\mathbb{R}^n$ **non nécessairement convexes**. On note

$$K_0 + K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists (k_0, k_1) \in K_0 \times K_1, x = k_0 + k_1\} .$$

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante (théorème de Brunn-Minkowski):

$$\mathrm{vol}(K_0)^{1/n} + \mathrm{vol}(K_1)^{1/n} \leq \mathrm{vol}(K_0 + K_1)^{1/n} . \qquad (1)$$

On **admettra** pour la suite la précision suivante. L'égalité ne se produit que dans les cas suivants: soit $\mathrm{vol}(K_0) = \mathrm{vol}(K_1) = 0$, soit l'un des compacts est réduit à un point, soit $K_0$ et $K_1$ sont images l'un de l'autre par une homothétie affine ou une translation.

**Question 1**
Si $(a_1, \ldots , a_n)$ et $(b_1, \ldots , b_n)$ sont deux $n$-uplets de réels, on note $P(a, b)$ le parallélépipède rectangle donné par

$$P(a, b) = \{(x_1, \ldots , x_n) \in \mathbb{R}^n | \forall i \in [1; n]\ a_i \leq x_i \leq b_i\} .$$

On appelle standard un parallélépipède qui est de cette forme et est d'intérieur non vide.

On suppose que $K_0$ et $K_1$ sont chacun réunions finies de parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints:

$$K_0 = \bigcup_{i=1}^{n_0} P(a^{(i)}, b^{(i)}) \quad K_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} P(c^{(i)}, d^{(i)}) .$$

On va montrer par récurrence sur $n_0 + n_1$ que l'inégalité (1) est valable pour $K_0$ et $K_1$.
**1.a** Etablir l'inégalité (1) dans le cas où $K_0$ et $K_1$ sont des parallélépipèdes standard (i.e. $n_0 = n_1 = 1$) en précisant le cas d'égalité (on pourra commencer par diviser par $\mathrm{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}$).
**1.b** Pour $n_0$ et $n_1$ quelconques avec $n_0$ supérieur ou égal à 2, trouver un entier $k$ entre 1 et $n$ ainsi que deux réels $t$ et $u$ de sorte que chacun des demi-espaces $x_k \geq t$ et $x_k \leq t$ contienne l'un des parallélépipèdes constituant $K_0$ et que l'hyperplan $x_k = u$ partage $K_1$ suivant les mêmes proportions que ne le fait $x_k = t$ avec $K_0$:

$$\frac{\mathrm{vol}(K_0 \cap \{x_k \leq t\})}{\mathrm{vol}(K_0 \cap \{x_k \geq t\})} = \frac{\mathrm{vol}(K_1 \cap \{x_k \leq u\})}{\mathrm{vol}(K_1 \cap \{x_k \geq u\})} .$$

**1.c** Etablir l'inégalité (1) dans le cas où $K_0$ et $K_1$ sont des réunions finies de parallélépipèdes standard d'intérieurs disjoints.

**Question 2**
En déduire le théorème de Brunn-Minkowski.

## Partie IV - Etude de la quantité $\mathrm{vol}(K).\mathrm{vol}(K^\star)$.

Soit $K$ un corps convexe compact $O$-symétrique et $E_K$ l'ellipsoide de volume maximal inclus dans $K$ (cf. partie II).

**Question 1** *(Minoration de* $\mathrm{vol}(K).\mathrm{vol}(K^\star)$*)*
**1.a** On suppose ici que $E_K$ est la boule unité (euclidienne) de $\mathbb{R}^n$, notée $B_n$. Soit $x$ un réel. Montrer que, si le point de coordonnées $(x, 0, \ldots , 0)$ appartient à $K$, alors $|x| \leq \sqrt{n}$.
**1.b** On se replace dans le cas général où $E_K$ est quelconque. Montrer $E_K \subset K \subset \sqrt{n}E_K$ et

$$\mathrm{vol}(K).\mathrm{vol}(K^\star) \geq n^{-n/2}\mathrm{vol}(B_n)^2 .$$

**Question 2** *(Etude du cas maximal)*
On suppose ici que $K$ maximise la quantité $\mathrm{vol}(K).\mathrm{vol}(K^\star)$ parmi les corps convexes compacts $O$-symétriques.

Soit $H$ un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La décomposition orthogonale $\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$ et le choix d'une base de $H^\perp$ permettent d'identifier les points de $\mathbb{R}^n$ à des couples $(x, t)$ avec $x$ dans $H$ et $t$ dans $\mathbb{R}$. On note, pour $t$ réel,

$$K_t = \{x \in H | (x, t) \in K\} .$$

L'ensemble $I$ des réels $t$ tels que $K_t$ est non vide est donc un intervalle symétrique, d'intérieur non vide et compact de $\mathbb{R}$ (ces faits n'ont pas à être démontrés).

**2.a** Soit $\xi$ dans $H$, on note $\varphi_\xi^K$ la fonction convexe de $I$ dans $\mathbb{R}$

$$\varphi_\xi^K(t) = 1 - \sup_{x \in K_t} \langle \xi, x \rangle \ .$$

Montrer qu'un couple $(\xi, \lambda)$ de $H \times \mathbb{R}$ appartient à $K^\star$ si et seulement si

$$\xi \in (K_0)^\star \quad \text{et} \quad - \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \leq \lambda \leq \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} \ .$$

**Définition.** On définit un ensemble $K'$ ainsi: $(x,t) \in K'$ si et seulement si $t$ et $x$ appartiennent respectivement à $I$ et à $\frac{1}{2}(K_t + K_{-t})$ ( ce qui est la même chose que $\frac{1}{2}(K_t - K_t)$). Autrement dit $x$ est le milieu d'un point de $K_t$ et d'un point de $K_{-t} = -K_t$. Remarquons que $K_t$ et $K'_t$ sont convexes ou vides et que $K'$ est un corps convexe, compact et $O$-symétrique. (On ne demande pas démontrer ces faits.)

**2.b** Montre que $K'$ a un plus grand volume que $K$ et qu'il n'y a égalité que si pour $t$ intérieur à $I$ les $K_t$ admettent un centre de symétrie, i.e. il existe $\mu_t$ dans $H$ tel que $K_t = 2\mu_t - K_t$ (la symétrie de centre $\mu_t$ laisse $K_t$ globalement invariant).

**2.c** Déduire de la question 2.a que $(K')^\star$ a un plus grand volume que $K^\star$ et donc que $K_t$ admet un centre de symétrie (noté $\mu_t$) pour tout $t$ dans l'intérieur de $I$.

**2.d** Soit $\xi$ dans $H$; montrer qu'il existe un réel $\mu_\xi$ tel que, pour tout $t$ intérieur à $I$ et strictement positif,

$$\varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(t) = \mu_\xi t \ .$$

**2.e** En déduire qu'il existe $\mu$ dans $H$ tel que, pour tout $t$ dans $I$, $K_t$ admet $\mu$ comme centre de symétrie et donc qu'il existe une symétrie (non nécessairement orthogonale) $s$ par rapport à $H$ qui laisse $K$ globalement invariant et qui est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $j_K$ introduite en première partie.

**2.f** En déduire que $K$ est un ellipsoide et que $\mathrm{vol}(K).\mathrm{vol}(K^\star) = \mathrm{vol}(B_n)^2$. (On rappelle que $B_n$ désigne la boule unité de $\mathbb{R}^n$.)

**Question 3** *(Conclusion)*

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des corps convexes compacts $O$-symétriques de $\mathbb{R}^n$. Pour $K_0$ et $K_1$ dans $\mathcal{C}$, on pose

$$d(K_0, K_1) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ | e^{-\lambda} K_1 \subset K_0 \subset e^\lambda K_1\} \ .$$

On admettra que $(\mathcal{C}, d)$ est un espace métrique et que, pour tout $K$ dans $\mathcal{C}$ et tout couple de réels $(a,b)$, avec $a \leq b$, l'ensemble

$$\{K' \in \mathcal{C} | aK \subset K' \subset bK\}$$

est compact.

Montrer que pour tout corps convexe compact $O$-symétrique $K$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\frac{\mathrm{vol}(B_n)^2}{n^{n/2}} \leq vol(K)\mathrm{vol}(K^\star) \leq \mathrm{vol}(B_n)^2 \ .$$