Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Le but du problème est de donner une preuve partielle du théorème de la variété stable.

Préliminaires et notations

Préliminaires généraux

Dans tout le problème, k désigne un entier strictement positif ; $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Le complémentaire d'un sous-ensemble Y dans X est noté $X - Y$.

Si E et F sont des espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E,\, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\operatorname{End}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\operatorname{Aut}(E)$ celui des automorphismes de E. Le déterminant d'un endomorphisme A est noté $\det A$.

Dans $\mathbb{R}^k$, le produit scalaire canonique de deux vecteurs u et v est noté $< u, v >$.

Si f est un homéomorphisme d'un espace métrique $(X,\, d)$, on désigne par f^n la n-ième itérée de f. Si x est élément de X, la variété[3] stable pour f du point x est l'ensemble

$$W^s_x(f) = \big\{ y \in X \;\big|\; \lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x),\, f^n(y)\big) = 0 \big\}.$$

De même, la variété instable pour f du point x est l'ensemble

$$W^u_x(f) = \big\{ y \in X \;\big|\; \lim_{n\to\infty} d\big(f^{-n}(x),\, f^{-n}(y)\big) = 0 \big\}.$$

Soit γ un réel strictement positif. On rappelle qu'une application f d'un espace métrique $(X,\, d)$ dans lui-même est lipschitzienne de rapport γ (ou γ-lipschitzienne) si

$$\forall (x, y) \in X^2, \quad d\big(f(y),\, f(x)\big) \leqslant \gamma\, d(x, y).$$

On note Li_γ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γ-lipschitziennes s'annulant en 0.

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

Dans les parties 1, 4 et 5, $\mathbb{R}^2$ sera muni de la norme $|(x_1,\, x_2)| = \max\big\{|x_1|, |x_2|\big\}$.

Soit h une application bornée, élément de $C^1(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R})$ et dont la différentielle $\mathrm{d}h$ est bornée. On note :

- $|h|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} |h(x)|$;
- $\mathrm{d}h_x$ la différentielle de h au point x $\big(\mathrm{d}h_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R})\big)$;
- $\|\mathrm{d}h_x\|$ la norme subordonnée dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R})$ de $\mathrm{d}h_x$;
- $|\mathrm{d}h|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} \|\mathrm{d}h_x\|$;

[3] **Dans ce problème, le mot variété est juste une notation.**

et on pose $|h|_{C^1} = \max(|h|_\infty, |\mathrm{d}h|_\infty)$.

Liens entre les différentes parties

- *la partie* 3 *utilise les résultats de la partie* 2 *;*
- *la partie* 4 *utilise les résultats des parties* 1 *et* 2 *;*
- *la partie* 5 *est indépendante du reste du problème.*

Les candidats peuvent admettre les résultats d'une question à condition de l'indiquer clairement et poursuivre le problème en respectant la numérotation des questions.

1. Introduction

1.1. Montrer que l'application $d_\gamma : (\varphi, \psi) \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}-\{0\}} \dfrac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{|x|}$, définie sur $(Li_\gamma)^2$, est une distance.

1.2. Montrer que, pour la métrique définie par la distance d_γ, Li_γ est complet.

1.3. Soient $\mu > 0$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi \in Li_\gamma$ tels que $|h|_{C^1}(1+\gamma) < \mu$.
Montrer que l'application G_φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_\varphi(x) = \mu x + h\big(x, \varphi(x)\big),$$

est strictement croissante. En déduire que G_φ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$.

2. Partie linéaire

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^k$. Le rayon spectral $r(A)$ est par définition le maximum des modules des valeurs propres complexes de A.

2.1. Soit ε' un réel strictement positif. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^k$ dans laquelle la matrice

$$a = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$$

de A est triangulaire supérieure et telle que pour tous i et j vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on ait $|a_{i,j}| \leqslant \varepsilon'$.

2.2. En déduire que pour tout réel ε strictement positif, il existe sur $\mathbb{R}^k$ une norme notée N dite ε-adaptée pour A, c'est-à-dire telle que pour la norme d'opérateur subordonnée $\|\cdot\|_N$:

$$\|A\|_N \leqslant r(A) + \varepsilon.$$

2.3. Montrer que, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^k$ et tout réel ε strictement positif, il existe une constante C_ε strictement positive telle que, pour tout $v \in \mathbb{R}^k$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|A^n v\| \leqslant C_\varepsilon (r(A) + \varepsilon)^n \|v\|.$$

On dira que $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ est hyperbolique si toutes ses valeurs propres complexes ont un module différent de 1.

Dans toute la suite de cette partie, A désigne un endomorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^k$.

2.4. Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E^+ et E^- de $\mathbb{R}^k$ stables par A tels que la restriction de A à E^+ (resp. E^-) ait toutes ses valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1.

On désigne par $A_{|E}$ la restriction de A au sous-espace E.

2.5. Montrer que $(A_{|E^+})$ est inversible.

2.6. Montrer qu'il existe une norme dite A-adaptée $\|\cdot\|$ telle que

$$\forall (x^+,\, x^-) \in E^+ \times E^-,\ \|x^+ + x^-\| = \max(\|x^+\|, \|x^-\|)$$

et de plus pour la norme subordonnée :

$$\|A_{|E^-}\| < 1 \ \text{ et } \ \|(A_{|E^+})^{-1}\| < 1.$$

2.7. Montrer que, pour tout $v \in E^-$, la suite $(A^n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2.8. Montrer de même que, pour tout $v \in E^+$ non nul, la suite $\big(\|A^n(v)\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Préliminaires pour les parties 3 et 4

Le tore $\mathbb{T}^k$ est par définition le groupe additif quotient du groupe $(\mathbb{R}^k, +)$ par le sous-groupe $(\mathbb{Z}^k, +)$. Tout élément x de $\mathbb{T}^k$ peut s'écrire de manière unique $x = (x_1,\, \ldots,\, x_k)$, avec $x_i \in \mathbb{T}^1$, pour $i = 1,\, \ldots,\, k$.
On définit la projection canonique $\Pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k = \mathbb{T}^k$.

3. Linéarité et topologie

On considére le sous-ensemble $E = \{L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k) \mid L(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k\}$ de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ ainsi que le sous-ensemble $\mathcal{E} = \{L \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k) \mid L \in E \text{ et } L^{-1} \in E\}$ de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)$.

3.1. Montrer qu'un élément L de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ appartient à E si, et seulement si, sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

3.2. Montrer qu'un élément L de E appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $\det L$ vaut -1 ou 1.

3.3. Dans cette question, on se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme L défini, pour tout $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$, par $L(x,\, y) = (2x + y,\, x + y)$. Cet endomorphisme est-il hyperbolique ? Est-il dans l'ensemble $\mathcal{E}$?

Existe-t-il des exemples comparables sur $\mathbb{R}$?

Dans toute la suite de cette partie 3, L désigne un élément hyperbolique de $\mathcal{E}$. Les sous-espaces vectoriels E^+ et E^- sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^k$ stables par L tels que la restriction de L à E^+ (resp. E^-) ait toutes ses valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1 ; l'existence de cette décomposition a été démontrée au 2.4.

On dit qu'un élément x de $[0,1]^k$ est un point périodique de L s'il existe un entier p strictement positif tel que $L^p(x)-x$ appartient à $\mathbb{Z}^k$. On désigne par $\mathrm{Per}L$ l'ensemble des points périodiques de L.

3.4. Démontrer que l'ensemble des points périodiques de L est donné par

$$\mathrm{Per}L = \mathbb{Q}^k \cap [0,1]^k.$$

En déduire que $\mathrm{Per}L$ est dense dans $[0,1]^k$.

3.5. Montrer que pour une distance donnant la topologie usuelle, les variétés stables et instables pour L d'un point a de $\mathbb{R}^k$ sont respectivement $W_a^s(L) = a + E^-$ et $W_a^u(L) = a + E^+$.

3.6. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^k$. On définit une application d de $\mathbb{T}^k \times \mathbb{T}^k$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$d(y,\, y') = \inf\big\{N(x-x') \;\big|\; x,\, x' \in \mathbb{R}^k \text{ avec } \Pi(x) = y \text{ et } \Pi(x') = y'\big\}.$$

1. Montrer que $\inf\limits_{z\in\mathbb{Z}^k-\{0\}} N(z)$ est strictement positif.
2. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{T}^k$.
3. Prouver que l'application $\Pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k$ est continue.

Dans la suite, $\mathbb{T}^k$ est muni de la topologie associée à la distance d.

3.7. Montrer que L induit un homéomorphisme noté F_L du tore $\mathbb{T}^k$ satisfaisant la relation de commutation

$$F_L \circ \Pi = \Pi \circ L.$$

La suite de cette partie n'est pas utilisée dans le reste du problème.

3.8. On suppose que la distance d provient d'une norme N adaptée pour L. Montrer que :
1. $\Pi(0 + E^-) \subset W_0^s(F_L)$;
2. $\Pi(0 + E^+)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$;
3. la variété stable pour F_L du point 0 est dense dans $\mathbb{T}^k$.

Une application continue $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ est dite topologiquement mélangeante si, pour toute paire d'ouverts non vides U et V de $\mathbb{T}^k$, il existe un entier n_0, tel que :

$$\forall n > n_0,\ f^n(U) \cap V \neq \varnothing.$$

3.9. Montrer qu'une isométrie de $\mathbb{T}^k$ n'est pas une application topologiquement mélangeante.

3.10. Montrer que F_L est une application topologiquement mélangeante.

Indication : *On pourra utiliser, outre le fait que 0 est un point fixe, la densité de la variété stable pour un automorphisme hyperbolique F_L du point 0 ainsi que la densité de la variété stable pour F_L^{-1} du point 0.*

4. Un exemple presque linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Dans la partie 4, f est une application élément de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, fixant l'origine et proche en C^1-topologie d'un automorphisme linéaire hyperbolique diagonal A défini, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par $A(x,y) = (\mu x, \lambda y)$ avec $0 < \lambda < 1 < \mu$. Ceci signifie que f est de la forme

$$f(x,y) = \big(\mu x + \alpha(x, y), \lambda y + \beta(x, y)\big)$$

avec α et β vérifiant $\alpha(0,0) = 0$, $\beta(0,0) = 0$ et il existe un réel δ, strictement positif, tel que $|\alpha|_{C^1} < \delta$ et $|\beta|_{C^1} < \delta$.

Dans la suite δ sera considéré comme petit, ce qui sera précisé par des inégalités.

4.1. Prouver que si $2\delta < \lambda$, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Indication : *On pourra montrer que pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ l'application*

$$F_{(x',y')} : (x, y) \mapsto \left(\frac{x'}{\mu} - \frac{\alpha(x,y)}{\mu}, \frac{y'}{\lambda} - \frac{\beta(x,y)}{\lambda}\right)$$

est lipschitzienne de rapport a, avec $0 < a < 1$.

Inégalités (*)

Dans toute la suite de cette partie on suppose qu'il existe un nombre γ vérifiant les inégalités

$$(*) \begin{cases} 0 < \gamma < 1 \\ 0 < \delta < \dfrac{\gamma(\mu - \lambda)}{\gamma + 2} \end{cases}$$

Le graphe d'une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$H\varphi = \big\{\big(x, \varphi(x)\big) \mid x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Dans la suite, on considère l'application G_φ définie, pour tout x réel, par

$$G_\varphi(x) = \mu x + \alpha\big(x, \varphi(x)\big).$$

4.2. Montrer que si φ est élément de Li_γ il existe une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $f(H\varphi) = H\psi$.

4.3. Montrer que $f_* : \varphi \mapsto \psi$, définie à la question précédente, est une application de Li_γ dans lui-même.

4.4. Prouver pour tous φ et φ' dans Li_γ et pour tout x dans $\mathbb{R}$, l'inégalité

$$\big|f_*(\varphi)\big(G_\varphi(x)\big) - f_*(\varphi')\big(G_\varphi(x)\big)\big| \leqslant \big(\lambda + \delta(1+\gamma)\big)\big|\varphi'(x) - \varphi(x)\big|.$$

4.5. En déduire qu'il existe une application φ^+ dans Li_γ dont le graphe H_{φ^+} est invariant par f.

Prouver l'inégalité $\big|f\big(x, \varphi^+(x)\big)\big| \geqslant (\mu - \delta)\big|\big(x, \varphi^+(x)\big)\big|$.

4.6. Pourquoi, si $\gamma,\ \delta$ satisfont les inégalités (*) et si δ est suffisamment petit, peut-on dire que l'ensemble $\big\{\big(x,\,\varphi^+(x)\big)\ \big|\ x\in\mathbb{R}\big\}$ est contenu dans la variété instable pour f du point $(0,0)$?

Commentaires sur les variétés stables et instables

On prouverait avec les mêmes arguments l'existence d'une variété stable de l'origine qui est le "graphe vertical" d'une fonction lipschitzienne $\varphi^-\in Li_\gamma$ c'est-à-dire

$$W_0^s(f)=\big\{\big(\varphi^-(x),\,x\big)\ \big|\ x\in\mathbb{R}\big\}.$$

On pourrait aussi montrer que les variétés stables et instables sont en fait des graphes d'applications de classe C^1.

5. Différentiabilité des fonctions lipschitziennes

Soit $\varphi\in Li_\gamma$ et $x\in\mathbb{R}$; on introduit, pour $y\neq x$, $\quad \Delta_y\varphi=\dfrac{\big(y,\varphi(y)\big)-\big(x,\varphi(x)\big)}{\big|\big(y,\varphi(y)\big)-\big(x,\varphi(x)\big)\big|}$, on pose :

$$U_x\varphi=\Big\{v\in\mathbb{R}^2\ \Big|\ \exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty}x_n=x,\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_n\neq x\ \text{et}\ \lim_{n\to\infty}\Delta_{x_n}\varphi=v\Big\}$$

et on définit l'ensemble tangent au graphe de φ au point x comme

$$T_x\varphi=\bigcup_{v\in U_x\varphi}\mathbb{R}v,\ \text{avec}\ \mathbb{R}v=\{av\,|\,a\in\mathbb{R}\}.$$

5.1. Montrer que $\mathrm{pr}_1(T_x\varphi)=\mathbb{R}$ où pr_1 est la projection sur le premier facteur :

$$\text{pour } u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{pr}_1(u)=u_1.$$

Indication : *On pourra remarquer que pour tout $y\neq x$, $|\Delta_y\varphi|=1$.*

5.2. Le cône horizontal H^γ est l'ensemble $H^\gamma=\big\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2\ \big|\ |u_2|\leqslant\gamma|u_1|\big\}$. Montrer l'inclusion $T_x\varphi\subset H^\gamma$.

5.3. On considére la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x non nul par

$$\phi(x)=\frac{x}{2}\cdot\sin\big(\ln|x|\big).$$

Appartient-elle à Li_γ pour un certain γ ? Expliciter $T_0\phi$.

5.4. On suppose que $\gamma\leqslant 1$. Montrer que, si $T_x\varphi$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, alors φ est dérivable en x.
