Corrigé

I. Algèbres de convolution « tordue »

A. La convolution tordue

1. (a) Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ et J une partie finie de $\mathbb{Z}^2$. Posons $\Delta = \{(i,i),\ i \in J\}$. Puisque $\Delta \subset J^2$ et que $|a_i||a_j| \geqslant 0$ (pour $(i,j) \in J^2$), on a

$$\sum_{i\in J} |a_i|^2 = \sum_{(i,j)\in\Delta} |a_i||a_j| \leqslant \sum_{(i,j)\in J^2} |a_i||a_j| = \Big(\sum_{i\in J} |a_i|\Big)^2.$$

   (b) De (a) on déduit que, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ et toute partie finie J de $\mathbb{Z}^2$, on a l'encadrement : $\sum_{i\in J} |a_i|^2 \leqslant \Big(\sum_{i\in J} |a_i|\Big)^2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1^2$. Prenant le sup de ces quantités, on trouve donc $\|\mathbf{a}\|_2^2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1^2$, d'où l'inégalité $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$.
   Si $\mathbf{a} \in A_1$, alors $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 < +\infty$, donc $\mathbf{a} \in A_2$.

2. Pour $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, posons $\sigma(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m,n} = \sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} a_{m,n}$, où l'on a noté $\operatorname{Supp}\mathbf{a}$ le support de $\mathbf{a}$. Il est clair que σ est linéaire et que $\sigma(W_{m,n}) = 1$.
   On a $\Big|\sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} a_{m,n}\Big| \leqslant \sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} |a_{m,n}|$, donc $|\sigma(\mathbf{a})| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$.
   En particulier, σ est une forme linéaire continue sur l'espace normé $(\mathcal{A}, \|\ \|_1)$ (et $|||\sigma||| = 1$).
   Par densité, elle admet un unique prolongement linéaire et continu $\sigma : A_1 \to \mathbb{C}$.
   Soit $\sigma' : A_1 \to \mathbb{C}$ une autre forme linéaire continue vérifiant $\sigma'(W_{m,n}) = 1$. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. On a $\mathbf{a} = \sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} a_{m,n} W_{m,n}$, donc $\sigma'(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n)\in\operatorname{Supp}\mathbf{a}} a_{m,n}\sigma'(W_{m,n}) = \sigma(\mathbf{a})$. Ainsi, les formes linéaires continues σ et σ' coïncident sur $\mathcal{A}$; par densité elles sont égales.

3. (a) Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, posons $d_{p,q} = \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}$; posons $\mathbf{d} = (d_{p,q})$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|\mathbf{d}\|_1 = \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} |d_{p,q}| \leqslant \Big(\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \big|\lambda^{q(m-p)} a_{p,q}\big|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \big|b_{m-p,n-q}\big|^2\Big)^{1/2} = \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b}\|_2,$$

   donc $\mathbf{d} \in A_1$.

   (b) On a, par définition, $c_{m,n} = \sigma(\mathbf{d})$. Il vient, $|c_{m,n}| \leqslant |||\sigma|||\|\mathbf{d}\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b}\|_2$.
   Supposons que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$; posons

$$M = \sup\{|p+p'| + |q+q'|;\ (p,q) \in \operatorname{Supp}\mathbf{a}; (p',q') \in \operatorname{Supp}\mathbf{b}\}.$$

   Comme $\operatorname{Supp}\mathbf{a} \times \operatorname{Supp}\mathbf{b}$ est fini, ce « sup » est atteint, donc $M \neq +\infty$.
   Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|m|+|n| > M$. Pour tout $(p,q) \in \operatorname{Supp}\mathbf{a}$ et $(p',q') \in \operatorname{Supp}\mathbf{b}$, on a $(p+p', q+q') \neq (m,n)$. Donc, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, on a $a_{p,q} = 0$, ou $b_{m-p,n-q} = 0$. La famille $\Big(\lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ est donc nulle, donc $c_{m,n} = 0$.

Passons au cas général. Soit $\varepsilon > 0$, il existe (par densité de $\mathcal{A}$ dans A_2) des éléments $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathcal{A}$ tels que $\|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b}-\mathbf{b}'\|_2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{a}'\|_2\|\mathbf{b}'\|_2 \leqslant \varepsilon$. Posons

$$M = \sup\{|p+p'| + |q+q'|;\ (p,q) \in \operatorname{Supp}\mathbf{a}'; (p',q') \in \operatorname{Supp}\mathbf{b}'\}.$$

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|m|+|n| > M$. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, on a $a'_{p,q}b'_{m-p,n-q} = 0$, donc

$$a_{p,q}b_{m-p,n-q} = a_{p,q}(b_{m-p,n-q} - b'_{m-p,n-q}) + (a_{p,q} - a'_{p,q})b'_{m-p,n-q}.$$

On trouve alors

$$c_{m,n} = \Big(\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q}(b_{m-p,n-q} - b'_{m-p,n-q})\Big) + \Big(\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)}(a_{p,q} - a'_{p,q})b'_{m-p,n-q}\Big).$$

Or par ce qui précède, $\Big|\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q}(b_{m-p,n-q} - b'_{m-p,n-q})\Big| \leqslant \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b}-\mathbf{b}'\|_2$ et $\Big|\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)}(a_{p,q} - a'_{p,q})b'_{m-p,n-q}\Big| \leqslant \|\mathbf{a}-\mathbf{a}'\|_2\|\mathbf{b}'\|_2$. Alors, il vient

$$\begin{aligned} |c_{m,n}| &\leqslant \Big|\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q}(b_{m-p,n-q} - b'_{m-p,n-q})\Big| + \Big|\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)}(a_{p,q} - a'_{p,q})b'_{m-p,n-q}\Big| \\ &\leqslant \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b}-\mathbf{b}'\|_2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{a}'\|_2\|\mathbf{b}'\|_2 \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) Écrivons $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, on a $|c_{m,n}| \leqslant \sum_{p,q} |a_{p,q}||b_{m-q,n-p}|$. Donc

$$\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_1 \leqslant \sum_{m,n}\sum_{p,q} |a_{p,q}||b_{m-q,n-p}| = \|\mathbf{a}\|_1\|\mathbf{b}\|_1.$$

(d) On a

$$\begin{aligned} (W_{m,n} \star_\lambda W_{m',n'}) \star_\lambda W_{m'',n''} &= \lambda^{nm'} W_{m+m',n+n'} \star_\lambda W_{m'',n''} \\ &= \lambda^{nm'+(n+n')m''} W_{m+m'+m'',n+n'+n''} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W_{m,n} \star_\lambda (W_{m',n'} \star_\lambda W_{m'',n''}) &= \lambda^{n'm''} W_{m,n} \star_\lambda W_{m'+m'',n'+n''} \\ &= \lambda^{n(m'+m'')+n'm''} W_{m+m'+m'',n+n'+n''} \\ &= (W_{m,n} \star_\lambda W_{m',n'}) \star_\lambda W_{m'',n''} \end{aligned}$$

Par linéarité, on trouve $(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c})$ pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{A}$. A l'aide de (c), on en déduit l'égalité $(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c})$ pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A_1$ - par densité de $\mathcal{A}$ dans A_1.

B. Fonctions périodiques de classe C^1.

1. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(fg)'(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t)$, donc

$$\begin{aligned} |(fg)(t)| + |(fg)'(t)| &\leqslant |f(t)||g(t)| + |f(t)||g'(t)| + |f'(t)||g(t)| \\ &\leqslant \big(|f(t)| + |f'(t)|\big)\big(|g(t)| + |g'(t)|\big) \\ &\leqslant N(f)N(g). \end{aligned}$$

Prenant le « sup » sur $t \in \mathbb{R}$, on trouve $N(fg) \leqslant N(f)N(g)$.

(b) Soient $f \in B$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes a_k pour $-n \leqslant k \leqslant n$ tels que $\sup\{|f'(t) - P(t)|;\ t \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon$ où l'on a posé $P(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2i\pi kt}$.

Puisque $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\, dt = 0$, il vient $|a_0| = \left|\displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $Q(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t (P(s) - a_0)\, dt$; la fonction Q est périodique de période 1 et appartient à l'espace vectoriel engendré par z^k pour $-n \leqslant k \leqslant n$. Pour $t \in [-1/2, 1/2]$, on a $|f(t) - Q(t)| = \left|\displaystyle\int_0^t (f'(s) - P(s) + a_0)\, ds\right| \leqslant \varepsilon$. On trouve alors $N(f - Q) \leqslant 3\varepsilon$.

2. (a) Notons $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ de B dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ la transformation de Fourier et $i : \ell^1(\mathbb{Z}) \to A_1$ l'application qui à une suite $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ associe la famille $(b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ définie par

$$b_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ a_m & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On a $\psi = i \circ \mathcal{F}$. L'application $\mathcal{F}$ est continue et on a $\widehat{fg} = \widehat{f} \star \widehat{g}$. De plus, i est continue car isométrique et l'on a clairement $i(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = i(\mathbf{a}) \star_\lambda i(\mathbf{b})$.

(b) Si $f = z^n$, on a $g = \lambda^n z^n$, donc $\psi(g) \star_\lambda V = \lambda^n \psi(f) \star_\lambda V = \lambda^n U^n \star_\lambda V = V \star_\lambda U^n = V \star_\lambda \psi(f)$. Le cas général en résulte par linéarité et continuité de ψ.

II. Un calcul d'image et de noyau

A. Approximation des réels par des rationnels

1. (a) Quitte à réordonner les s_i, on peut supposer que la suite s_i est croissante. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_{k+1} - s_k = s_{n+1} - s_0 \leqslant 1 - 0$. Il existe donc k tel que $s_{k+1} - s_k \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

(b) Pour $i = 0, \ldots, n$, posons $s_i = t_i - t_0 - E(t_i - t_0)$ où E désigne la partie entière ; posons aussi $s_{n+1} = 1$. Par (a), il existe i, j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ tels que $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Si $j \neq n+1$, on trouve $|(t_i - t_j) - p| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, où p est un entier ($p = E(t_i - t_0) - E(t_j - t_0)$). Si $j = n+1$, on trouve $|t_i - t_0 - p| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ avec $p = E(t_i - t_0) + 1$. Remarquons que dans ce cas $i \neq 0$ puisque $1 > \dfrac{1}{n+1}$.

(c) Posons $t_i = it$; il existe i, j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. On pose alors $k = j - i$; on trouve $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t = \dfrac{p}{q}$ est rationnel, alors $t \in U_\alpha(nq)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout α. Donc $t \in Y_\alpha$ pour tout α. Supposons que t soit irrationnel. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et notons $\varepsilon = \inf\{\delta(kt);\ 1 \leqslant k \leqslant n_0\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)\varepsilon > 1$. Par 1.(c), il

existe $q \leqslant n$ tel que $\delta(qt) \leqslant \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Par définition de ε, on a $q > n_0$; de plus $\delta(qt) \leqslant \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{q}$, donc $t \in U_1(q)$. Cela montre que $t \in Y_1$.

(b) On a $U_\alpha(q) = \displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left]\frac{p}{q} - q^{-\alpha-1}, \frac{p}{q} + q^{-\alpha-1}\right[$. Si $2q^{-\alpha} > 1$, on a $U_\alpha(q) = \mathbb{R}$; sinon, $U_\alpha(q) \cap [0,1]$ est réunion disjointe de $[0, q^{-\alpha-1}[$ de $]1 - q^{-\alpha-1}, 1]$ et des intervalles $\left]\dfrac{p}{q} - q^{-\alpha-1}, \dfrac{p}{q} + q^{-\alpha-1}\right[$ pour $1 \leqslant p \leqslant q-1$. Sa mesure est donc $\inf(1, 2q^{-\alpha})$.

(c) Notons μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha > 1$ on a $\displaystyle\sum_q \mu(U_\alpha(q) \cap [0,1]) < +\infty$. Par le théorème de Borel-Cantelli, on a $\mu(Y_\alpha \cap [0,1]) = 0$. Il est clair que $Y_\alpha \cap [n, n+1] = \{t + n;\ t \in Y_\alpha \cap [0,1]\}$, donc $\mu(Y_\alpha \cap [n, n+1]) = 0$ (par invariance par translation de μ).

On a $\mu(Y_\alpha) \leqslant \sum \mu(Y_\alpha \cap [n, n+1]) = 0$.

Pour $\alpha \geqslant \beta$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $U_\alpha(q) \subset U_\beta(q)$, donc $Y_\alpha \subset U_\beta$.

Il s'ensuit que $\displaystyle\bigcup_{\alpha>1} Y_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_{\frac{n+2}{n+1}}$. Donc Y est une réunion dénombrable d'ensembles négligeables : c'est une partie négligeable de $\mathbb{R}$.

3. (a) Par définition, on a $Y_\alpha = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{q>n} U_\alpha(q) \right)$. L'ensemble Y_α est donc une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. De plus par ce qui précède $X = \displaystyle\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*} Y_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_{n+1}$ est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Enfin, on a déjà noté que $\mathbb{Q} \subset X$, donc X est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Supposons que $t \in X$, et soit P un polynôme (à coefficients réels) ; soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ strictement plus grand que le degré de P.

Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, $P(n) < n^\alpha$. L'ensemble $\{n;\ \delta(nt) < n^{-\alpha}\}$ étant infini, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n) < n^\alpha$ et $\delta(nt) < n^{-\alpha}$, donc $\delta(nt)P(n) < 1$.

Supposons que $t \notin X$. Alors il existe $q \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on peut supposer entier tel que $t \notin Y_q$; l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^*;\ \delta(nt) < n^{-q}\}$ étant fini, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a\delta(nt) \geqslant 1$ pour tout n dans cet ensemble. Posons alors $P(t) = t^q + a$. On a bien $P(n)\delta(nt) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Un calcul d'image et de noyau

1. On a $V \star_\lambda U = \lambda U \star_\lambda V$. Donc, pour tout $x \in A_1$, on a

$$(V \star_\lambda U) \star_\lambda x \star_\lambda (V \star_\lambda U)^{-1} = (U \star_\lambda V) \star_\lambda x \star_\lambda (U \star_\lambda V)^{-1}.$$

On en déduit que $S \circ T = T \circ S$, donc $M \circ L = 0$.

2. Soit $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ un élément de A_1. Écrivons $L(\mathbf{a}) = ((b_{m,n}), (c_{m,n}))$.

On a $b_{m,n} = (\lambda^{-n} - 1)a_{m,n}$ et $c_{m,n} = (\lambda^m - 1)a_{m,n}$. Si $\mathbf{a} \in \mathrm{Ker}L$, alors pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(\lambda^{-n} - 1)a_{m,n} = (\lambda^m - 1)a_{m,n} = 0$. Si $m \neq 0$ (resp. $n \neq 0$) alors $\lambda^{-n} - 1 \neq 0$ (resp. $\lambda^m - 1 \neq 0$) donc $a_{m,n} = 0$. Il vient $\mathrm{Ker}L = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

3. Puisque $\tau(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) = \tau(\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a})$, on a $\tau \circ S = \tau \circ T = 0$, donc $\tau \circ M = 0$.
Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Les éléments $S(W_{m,n})$ et $T(W_{m,n})$ sont proportionnels à $W_{m,n}$ et l'un des deux au moins est non nul. Il en résulte que $W_{m,n} \in \mathrm{Im}M$, donc l'adhérence de $\mathrm{Im}M$ est $\mathrm{Ker}\tau$.
Posons $E = \mathrm{Ker}M \cap (\mathrm{Ker}\tau \times \mathrm{Ker}\tau)$. On sait déjà que $\mathrm{Im}L \subset \mathrm{Ker}M$. Par ailleurs, si $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathrm{Im}L$, il est clair que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{Ker}\tau$, donc $\mathrm{Im}L \subset E$. Comme E est un sous espace fermé de $A_1 \times A_1$, l'adhérence de $\mathrm{Im}L$ est incluse dans E. Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, posons aussi $E_{m,n} = \{(aW_{m,n}, bW_{m,n});\ (a, b) \in \mathbb{C}^2\} \cap E$. Il est clair que, pour $(m, n) \neq (0, 0)$, $E_{m,n}$ est de dimension 1 et engendré par $L(W_{m,n})$. Par ailleurs, si $x = \big((a_{m,n}), (b_{m,n})\big) \in E$, alors x est somme de la famille sommable $x_{m,n} = (a_{m,n}W_{m,n}, b_{m,n}W_{m,n})$. Comme $x_{m,n} \in E_{m,n}$, il en résulte que x est adhérent au sous-espace engendré par les $E_{m,n}$, lui-même contenu dans $\mathrm{Im}L$, soit $x \in \overline{\mathrm{Im}L}$. Cela prouve que $\overline{\mathrm{Im}L} = E$
4. Remarquons que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta} - 1| = 2|\sin\theta/2|$, donc
$$\|T(U^k)\|_1 = |e^{2ik\pi\theta} - 1| = 2\sin\pi\delta(k\theta).$$
Par A.1.(c), il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\delta(k\theta) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc
$$\inf\{\|T(U^k)\|_1;\ 1 \leqslant k \leqslant n\} \leqslant 2\sin\frac{\pi}{n+1}\cdot$$
On peut démontrer que l'image de L n'est pas fermée par des calculs analogues à ceux de la question suivante. Donnons une méthode basée sur le théorème de Banach : Si l'image de L était fermée, l'application linéaire continue $\mathrm{Ker}\tau \to E$ déduite de L serait bijective ; ce serait un homéomorphisme par le théorème de Banach. Il existerait donc une constante $c > 0$ telle que l'on ait $\|L(x)\|_1 \geqslant c\|x\|_1$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}\tau$. Ce n'est pas le cas par ce qui précède puisque $U^k \in \mathrm{Ker}\tau$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\|L(U^k)\|_1 = \|T(U^k)\|_1$.
5. Soit $\big((a_{m,n}), (b_{m,n})\big) \in \mathrm{Ker}M'$. Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, posons
$$c_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } (m, n) = (0, 0) \\ a_{0,n}(\lambda^{-n} - 1)^{-1} & \text{si } m = 0 \text{ et } n \neq 0 \\ b_{m,0}(\lambda^m - 1)^{-1} & \text{si } n = 0 \text{ et } m \neq 0 \\ a_{m,n}(\lambda^{-n} - 1)^{-1} = b_{m,n}(\lambda^m - 1)^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$
Remarquons que $\big((a_{m,n}), (b_{m,n})\big) \in \mathrm{Im}L'$ si et seulement si $(c_{m,n}) \in \mathcal{E}$.
Reprenons les notations de A.3. Si $\theta \notin X$, il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que $|c_{m,n}| \leqslant P(|m| + |n|)(|a_{m,n}| + |b_{m,n}|)$; il en résulte que $(c_{m,n}) \in \mathcal{E}$ pour tout $\big((a_{m,n}), (b_{m,n})\big) \in \mathrm{Ker}M'$, donc $\mathrm{Im}L' = \mathrm{Ker}M'$.
Dans ce cas, pour tout $(a_{m,n}) \in \mathcal{E}$, posons $b_{m,n} = (1 - \lambda^m)^{-1}a_{m,n}$ si $m \neq 0$ et $b_{0,n} = 0$ et $c_{m,0} = (\lambda^{-n} - 1)^{-1}a_{0,n}$ si $n \neq 0$, $c_{m,n} = 0$ dans tous les autres cas. On vérifie sans peine que $\big((b_{m,n}), (c_{m,n})\big) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ et $M'\big((b_{m,n}), (c_{m,n})\big) = (a_{m,n})$, donc $\mathrm{Im}L' = \mathcal{E}$.
Si $\theta \in X$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^k\delta(n\theta) < 1$. On peut construire une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k on ait $n_k \in \mathbb{N}^*$ et $\delta(\theta n_k)n_k^k < 1$. Posons alors
$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 - \lambda^{n_k} & \text{si } m = 0 \text{ et } n = n_k \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$
et $b_{m,n} = 0$. Alors $\big((a_{m,n}), (b_{m,n})\big) \in \mathrm{Ker}M'$ mais $\big((a_{m,n}), (b_{m,n})\big) \notin \mathrm{Im}L'$.
De plus, $(a_{m,n}) \notin \mathrm{Im}M'$, donc $\mathrm{Im}M' \neq \mathcal{E}$.

III : Calcul de normes - stabilité par l'inverse

A. La représentation régulière.

1. Soient $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)} \in A_1$ et $\mathbf{b} = (b_{m,n})_{(m,n)} \in A_2$. Écrivons $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n)}$. On a $\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_2 = \sup \Big\{ \sum_{m,n} |c_{m,n}||d_{m,n}|;\ \mathbf{d} = (d_{m,n})_{(m,n)} \in \mathcal{A};\ \|\mathbf{d}\|_2 \leqslant 1 \Big\}$.

   Soit $\mathbf{d} = (d_{m,n})_{(m,n)} \in \mathcal{A}$. Pour $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $c_{m,n} \leqslant \sum_{p,q} |a_{p,q}||b_{m-p,n-q}|$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{m,n} |c_{m,n}||d_{m,n}| &\leqslant \sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}||b_{m-p,n-q}||d_{m,n}| \\ &\leqslant \Big(\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}||b_{m-p,n-q}|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}||d_{m,n}|^2 \Big)^{1/2}\end{aligned}$$

   d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Sommant d'abord par m, n, on trouve

$$\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}||b_{m-p,n-q}|^2 = \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2^2,$$

   donc

$$\sum_{m,n} |c_{m,n}||d_{m,n}| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2 \|\mathbf{d}\|_2.$$

   Cela étant vrai pour tout $\mathbf{d}$, on trouve $\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2$.
2. On a $\mathbf{a} = \mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{1} = \pi(\mathbf{a})(\mathbf{1})$, donc $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant |||\pi(\mathbf{a})||| \|\mathbf{1}\|_2 = |||\pi(\mathbf{a})|||$.
3. Pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A_1$, on a
   $(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c})$ par I.A.3.(d), donc $\pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b})(\mathbf{c}) = (\pi(\mathbf{a}) \circ \pi(\mathbf{b}))(\mathbf{c})$.
   Les applications linéaires continues $\pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b})$ et $\pi(\mathbf{a}) \circ \pi(\mathbf{b})$ coïncident sur le sous-espace dense A_1 de A_2. Elles sont donc égales.
   Remarquons que $\pi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_{A_2}$, donc $\pi(U) \circ \pi(U^{-1}) = \pi(U^{-1}) \circ \pi(U) = \mathrm{id}_{A_2}$.
   Par ailleurs, comme $\|U\|_1 = \|U^{-1}\|_1 = 1$, on trouve $|||\pi(U)||| \leqslant 1$ et $|||\pi(U^{-1}||| \leqslant 1$. On en déduit que, pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on a $\|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_2$.
   Or $\mathbf{a} = \pi(\mathbf{1})(\mathbf{a}) = \pi(U^{-1}) \circ \pi(U)(\mathbf{a})$, donc $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2$. On en déduit que $\|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2^2 = \|\mathbf{a}\|_2^2$. Notons $\langle\ |\ \rangle$ le produit scalaire de A_2.
   Par l'identité de polarisation, on trouve $\langle \pi(U)(\mathbf{a}) | \pi(U)(\mathbf{b}) \rangle = \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2$ ce qui s'écrit $\langle \pi(U)^* \circ \pi(U)(\mathbf{a}) | \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$. On en déduit que $\pi(U)^* \circ \pi(U)(\mathbf{a}) - \mathbf{a}$ est orthogonal à A_2 donc est nul. Cela étant vrai pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on trouve $\pi(U)^* \pi(U) = \mathrm{id}_{A_2}$. Comme U est inversible, on trouve $\pi(U)^* = \pi(U)^{-1}$.
   De même, $\pi(V)$ est unitaire.

B. Un calcul de norme

1. Il est clair que $|||T^* \circ T||| \leqslant |||T|||^2$. Pour tout $x \in A_2$ tel que $\|x\|_2 = 1$, on a
   $$\|T(x)\|^2 = \langle x | T^* \circ T(x) \rangle \leqslant \|T^* \circ T(x)\|_2 \leqslant |||T^* \circ T|||.$$
   Prenant le « sup » sur x, on trouve $|||T|||^2 \leqslant |||T^* \circ T|||$. Appliquant ceci à $(T^* \circ T)^{2^k}$, on trouve (par récurrence) que $|||(T^* \circ T)^{2^k}||| = |||T|||^{2^k}$. La suite convergente '$|||(T^* \circ T)^n|||^{1/n}$ admet une sous-suite constante (pour $n = 2^k$) et $|||T^* \circ T||| = \lim |||(T^* \circ T)^n|||^{1/n}$.
   Donc $|||T||| = \lim |||(T^* \circ T)^n|||^{1/2n}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le nombre d'éléments du support de $\mathbf{a}^n$.
   (a) Écrivons $\mathbf{a}^n = (b_{p,q})_{p,q} \in \mathbb{Z}^2$.
   Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ posons $c_{p,q} = 0$ si $b_{p,q} = 0$ et $b_{p,q}c_{p,q} = |b_{p,q}|$ pour tout (p,q). On a $\|(c_{p,q})\|_2 = \sqrt{k_n}$ et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
   $$\|\mathbf{a}\|_1 = \langle (b_{p,q}) | (c_{p,q}) \rangle \leqslant \|\mathbf{a}\|_2 \sqrt{k_n}.$$
   (b) Il existe $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $a_{p,q} \neq 0 \Rightarrow p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ et $q_0 \leqslant q \leqslant q_1$. Posons alors $r = 1 + \max(p_1 - p_0, q_1 - q_0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le support de $\mathbf{a}^n$ est contenu dans $\{(p,q);\ np_0 \leqslant p \leqslant np_1,\ \text{et } nq_0 \leqslant q \leqslant nq_1\}$, donc
   $$k_n \leqslant \big(n(p_1 - p_0) + 1\big)\big(n(q_1 - q_0) + 1\big) \leqslant n^2 r^2.$$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|\mathbf{a}^n\|_2 \leqslant |||\pi(\mathbf{a}^n)||| \leqslant \|\mathbf{a}^n\|_1 \leqslant rn\|\mathbf{a}^n\|_2$;
   comme $\lim(rn)^{1/n} = 1$, (c) en résulte.
   (d) Appliquant les résultats de (c) à $\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}$, on trouve
   $$|||\pi(\mathbf{a})|||^2 = \lim \Big|\Big|\Big|\pi\big((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\big)\Big|\Big|\Big|^{1/n} = \lim \Big\|\big(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}\big)^n\Big\|_1^{1/n} = \lim \Big\|(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\Big\|_2^{1/n}.$$
   Or $\Big\|(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\Big\|_2^2 = \tau\big((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}\big)$, d'où l'on trouve $|||\pi(\mathbf{a})||| = \lim \Big(\tau\big((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}\big)\Big)^{1/4n}$.

C. Deux applications

1. (a) Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}^2$, $u^m \circ v^n$ est un unitaire de $\mathcal{L}(H)$, donc $|||u^m \circ v^n||| = 1$. Soit $\mathbf{a} \in A_1$. La famille $(a_{m,n} u^m \circ v^n)_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est normalement sommable donc sommable (puisque $\mathcal{L}(H)$ est un espace de Banach). Posons
   $$\sigma_{u,v}(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n} u^m \circ v^n.$$
   On a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = \Big|\Big|\Big| \sum a_{m,n} u^m \circ v^n \Big|\Big|\Big| \leqslant \sum |||a_{m,n} u^m \circ v^n||| = \|a\|_1$. En particulier, $\sigma_{u,v}$ est continue.
   Il est clair que $\sigma_{u,v}(W_{m,n}) = u^m \circ v^n$. En particulier $\sigma_{u,v}(U) = u$, $\sigma_{u,v}(V) = v$.
   On a $\sigma_{u,v}(W_{m,n})\sigma_{u,v}(W_{p,q}) = u^m \circ v^n \circ u^p \circ v^q = \lambda^{np} u^{m+p} \circ v^{n+q} = \sigma_{u,v}(W_{m,n} \star_\lambda W_{p,q})$.
   Par linéarité et continuité, pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_1$ on a $\sigma_{u,v}(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) = \sigma_{u,v}(\mathbf{a})\sigma_{u,v}(\mathbf{b})$.
   Si $\sigma' : A_1 \to \mathcal{L}(H)$ vérifie aussi ces propriétés, à l'aide des propriétés $\mathbf{1} \star_\lambda U = U$, $U^{-1} \star_\lambda U = \mathbf{1}$ et $V^{-1} \star_\lambda V = \mathbf{1}$ on trouve successivement $\sigma'(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_H$, $\sigma'(U^{-1}) = u^{-1}$, $\sigma'(V^{-1}) = v^{-1}$, puis $\sigma'(W_{m,n}) = \sigma'(U^m \star_\lambda V^n) = u^m \circ v^n$. Il en résulte que σ' coïncide avec $\sigma_{u,v}$ sur $\mathcal{A}$ (par linéarité), donc sur A_1 (par continuité).
   (b) On a $\sigma_{u,v}(\mathbf{a}^*) = \sigma_{u,v}(\mathbf{a})^*$ pour tout $\mathbf{a} \in A_1$. On en déduit que
   $$|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = \lim |||\sigma_{u,v}\big(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\big)|||^{1/2n} \leqslant \lim \|(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n)\|_1^{1/2n} = |||\pi(\mathbf{a})|||.$$

2. (a) Soit $x = \pi(\mathbf{a})^{-1}$. Comme π est continue, $\mathcal{A}$ est dense dans A_1 et $\pi(A_1)$ est dense dans A, $\pi(\mathcal{A})$ est dense dans A. Il existe donc $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $|||\pi(\mathbf{b}) - x|||\|\mathbf{a}\|_1 < 1$.
   On a alors $|||\pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) - \mathrm{id}_{A_2}||| = |||\pi(\mathbf{a})\big(\pi(\mathbf{b}) - x\big)||| < 1$ et $|||\pi(\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a}) - \mathrm{id}_{A_2}||| < 1$.

(b) Posons $x = \mathbf{1} - \mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}$. On a $\lim \|x^n\|^{1/n} = \lim |||\pi(x)^n|||^{1/n} \leqslant |||\pi(x)||| < 1$. Par la règle de Cauchy, la série de terme général $\|x^n\|_1$ est convergente, donc la série de terme général x^n est convergente dans l'epace de Banach A_1. On en déduit que $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = \mathbf{1} - x$ est inversible dans A_1 (d'inverse $\sum x^n$). De même $\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a}$ est inversible dans A_1. Il en résulte que $\mathbf{a}$ admet un inverse à droite et un inverse à gauche donc est inversible dans A_1.

D. Idéaux bilatères et représentations

1. (a) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et $0 \leqslant j,k < n$, on a $U^j \star_\lambda V^k \star_\lambda W_{p,q} \star_\lambda V^{-k} \star_\lambda U^{-j} = \lambda^{kp-jq} W_{p,q}$, donc $\tau_n(W_{p,q}) = \Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-jq}\Big)\Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{kp}\Big) W_{p,q}$. Il en résulte que, si $(p,q) \neq (0,0)$, la suite $\tau_n(W_{p,q})$ converge vers 0 dans A_1. Par linéarité, la suite $\tau_n(\mathbf{a})$ converge dans A_1 vers $\tau(\mathbf{a})\mathbf{1}$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Soient $\mathbf{a} \in A_1$ et $\varepsilon > 0$; il existe $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_1 < \varepsilon/3$. Par ce qui précède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\|\tau_n(\mathbf{b}) - \tau(\mathbf{b})\mathbf{1}\|_1 < \varepsilon/3$. Remarquons que, pour tout $\mathbf{c} \in A_1$ on a $\|\tau_n(\mathbf{c})\|_1 \leqslant \|\mathbf{c}\|_1$, donc, pour $n \geqslant N$, on a
$$\|\tau_n(\mathbf{a}) - \tau(\mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 \leqslant \|\tau_n(\mathbf{a} - \mathbf{b})\|_1 + \|\tau_n(\mathbf{b} - \tau(\mathbf{b})\mathbf{1}\|_1 + \|\tau(\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 < \varepsilon.$$
(b) Puisque $\mathbf{a} \neq 0$, on a $\tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|_2^2 > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a $\|\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}) - \tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 < \tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$, donc $\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$ est inversible dans A_1.

2. Soit J un idéal bilatère non nul de A_1 et $\mathbf{a}$ un élément non nul de J. Alors J contient tous les $\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$, donc un élément inversible de A_1, donc $J = A_1$.

3. (a) Pour tout n on a $\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a})) = n^{-2} \displaystyle\sum_{0 \leqslant j,k < n} u^j \circ v^k \circ \sigma_{u,v}(\mathbf{a}) \circ v^{-k} \circ u^{-j}$,
donc $|||\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a}))||| \leqslant |||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$.
Or par 1.(a), on a $\lim |||\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a}))||| = |\tau(\mathbf{a})|$, donc $|\tau(\mathbf{a})| \leqslant |||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$.
(b) Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Big|\Big|\Big|\sigma_{u,v}\big((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}\big)\Big|\Big|\Big|^{1/4n} \geqslant \Big|\tau\big((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}\big)\Big|^{1/4n}$.
Dans cette inégalité, le membre de gauche converge vers $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$ et celui de droite vers $|||\pi(\mathbf{a})|||$. On en déduit $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| \geqslant |||\pi(\mathbf{a})|||$, d'où l'égalité.
L'égalité $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = |||\pi(\mathbf{a})|||$ s'en déduit par densité de $\mathcal{A}$ dans A_1.

IV : Une égalité de norme

Notons $v_\mathbb{R}$, $v_\mathbb{U}$ et $v_\mathbb{Z}$ les opérateurs unitaires définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_\mathbb{R}$ (*resp.* $\tilde{\xi} \in H_\mathbb{U}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $v_\mathbb{R}(\tilde{\xi})$ (*resp.* $v_\mathbb{U}(\tilde{\xi})$) la classe dans $H_\mathbb{R}$ (*resp.* dans $H_\mathbb{U}$) de la fonction $t \mapsto \xi(t+\theta)$. Si $\xi \in H_\mathbb{Z}$, on pose $(v_\mathbb{Z}(\xi))(n) = \xi(n+1)$.

Reprenons les notations de la partie I.B. Si $g \in B$, notons $\rho_\mathbb{R}(g)$, $\rho_\mathbb{U}(g)$ et $\rho_\mathbb{Z}(g)$ les opérateurs définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_\mathbb{R}$ (*resp.* $\tilde{\xi} \in H_\mathbb{U}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $(\rho_\mathbb{R}(g))(\tilde{\xi})$ (*resp.* $(\rho_\mathbb{U}(g))(\tilde{\xi})$) la classe dans $H_\mathbb{R}$ (*resp.* dans $H_\mathbb{U}$) de la fonction $t \mapsto g(t)\xi(t)$. Si $\xi \in H_\mathbb{Z}$, on pose $((\rho_\mathbb{Z}(g))(\xi))(n) = g(n\theta)\xi(n)$. Posons $u_\mathbb{R} = \rho_\mathbb{R}(z)$, $u_\mathbb{U} = \rho_\mathbb{U}(z)$ et $u_\mathbb{Z} = \rho_\mathbb{Z}(z)$. On vérifie immédiatement que l'on a
$$v_\mathbb{R} \circ u_\mathbb{R} = \lambda u_\mathbb{R} \circ v_\mathbb{R},\ v_\mathbb{U} \circ u_\mathbb{U} = \lambda u_\mathbb{U} \circ v_\mathbb{U} \text{ et } v_\mathbb{Z} \circ u_\mathbb{Z} = \lambda u_\mathbb{Z} \circ v_\mathbb{Z}.$$
Par III.C.1, il existe des homomorphismes

$$\sigma_{\mathbb{R}} : A_1 \to \mathcal{L}(H_{\mathbb{R}}),\ \sigma_{\mathbb{U}} : A_1 \to \mathcal{L}(H_{\mathbb{U}}) \text{ et } \sigma_{\mathbb{Z}} : A_1 \to \mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}})$$

tels que $\sigma_{\mathbb{R}}(U) = u_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{R}}(V) = v_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(U) = u_{\mathbb{U}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(V) = v_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}}(U) = u_{\mathbb{Z}}$, $\sigma_{\mathbb{Z}}(V) = v_{\mathbb{Z}}$.
Les homomorphismes $\sigma_{\mathbb{R}} \circ \psi$ et $\rho_{\mathbb{R}}$ prennent la même valeur $u_{\mathbb{R}}$ en z, donc en z^n. Ils coïncident par I.B.1.(b). De même, $\sigma_{\mathbb{U}} \circ \psi = \rho_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}} \circ \psi = \rho_{\mathbb{Z}}$.

Posons $T = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \psi(f_k)V^k$. On a $\sigma_{\mathbb{R}}(T) = T_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(T) = T_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}}(T) = T_{\mathbb{Z}}$.

Par III.D, on a $|||T_{\mathbb{R}}||| = |||T_{\mathbb{U}}||| = |||T_{\mathbb{Z}}||| = |||\pi(T)|||$.