Corrigé de l'épreuve d'analyse et probabilités

Partie I

I.A.1.a) Pour μ dans $\mathbf{R}^*$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T e_\mu = \left[\frac{e^{i\mu T}-1}{T}\right] \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{T}\int_0^T p\, e_{-\lambda_0} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} c_{\lambda_0}.$$

b) Avec les notations de a), $p=0$ implique $c_{\lambda_0}=0$ pour tout réel λ_0, d'où le résultat.

2. a) Gardons les mêmes notations. Alors :

$$\text{Re } p = \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} \frac{c_\lambda + \overline{c_{-\lambda}}}{2}\, e_\lambda \qquad \text{et} \qquad \text{Im } p = \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} \frac{c_\lambda - \overline{c_{-\lambda}}}{2i}\, e_\lambda.$$

La symétrie de Λ montre que si $\lambda \notin \Lambda$, $c_\lambda = c_{-\lambda} = 0$ d'où l'on tire, avec les égalités précédentes, $\text{Re } p \in \mathcal{P}_\Lambda$ et $\text{Im } p \in \mathcal{P}_\Lambda$, puis le résultat voulu.

b) Supposons que Λ est un Sidon réel et fixons p dans $\mathcal{P}_\Lambda$. Le a) fournit $N(\text{Re}p) \leqslant K'(\Lambda)\ \sup\ \text{Re } p \leqslant K'(\Lambda)\ \|p\|_\infty$ et de même $N(\text{ Im } p) \leqslant K'(\Lambda)\ \|p\|_\infty$. Par suite :

$$N(p) = N(\text{ Re } p + i \text{ Im } p) \leqslant N(\text{ Re } p) + N(\text{ Im } p) \leqslant 2K'(\Lambda)\ \|p\|_\infty.$$

Il s'ensuit que Λ est de Sidon avec $K(\Lambda) \leqslant 2K'(\Lambda)$.

I.B.1.a) Si f est une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé bordé par l'image de γ, z_0 un point intérieur à ce même disque, p un entier naturel, la formule de Cauchy donne :

$$f^{(p)}(z_0) = p! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{p+1}}\ \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi}$$

Reste à appliquer ce résultat à $f=U_n$, $p=n$ et $z_0=x$.

b) Prenons x dans $]-1,1[$ et $r=\sqrt{1-x^2}$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\ \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\left(x+re^{i\theta}\right)^2-1}{re^{i\theta}}\right)^n \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^2-1}{re^{i\theta}}+2x+re^{i\theta}\right)^n \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\sqrt{1-x^2}e^{-i\theta}+2x+\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}\right)^n \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)\right)^n \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Tenant compte de la définition de L_n et de a), on en déduit la formule demandée.

Il reste à étendre la formule à $x = \pm 1$. Il est clair que l'on peut trouver P dans $\mathbf{C}[X, Y]$ tel que :

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)^n \,\mathrm{d}\theta = P\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$$

(il suffit de développer l'intégrale par la formule du binôme). Cette formule montre que les deux membres de l'égalité proposée sont fonctions continues de x sur $[-1, 1]$, et le résultat suit.

2. La question 1.b) donne : $L_n(1) = 1$ et $L_n(-1) = (-1)^n$.

Si $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on a :

$$\left|x + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right|^2 = x^2 + (1-x^2)\sin^2\theta \leqslant x^2 + 1 - x^2 \leqslant 1$$

On en tire : $|L_n(x)| \leqslant 1$. Au total : $\sup\{|L_n(x)|\,,\ x \in [-1, 1]\} = 1$.

3. a) Pour $x \in I_\eta$ et $\theta \in R$, le calcul de la question 2 donne :

$$\begin{aligned}\left|x + i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right|^2 &= x^2 + (1-x^2)\sin^2\theta = \sin^2\theta + x^2\cos^2\theta \\ &\leqslant \sin^2\theta + (1-\eta)^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

Or :

$$\sin^2\theta + (1-\eta)^2\cos^2\theta = 1 - 2\eta\cos^2\theta + \eta^2\cos^2\theta \leqslant 1 - \eta\cos^2\theta$$

car $\eta^2 \leqslant \eta$. L'inégalité demandée suit aisément.

b) Pour n dans $\mathbf{N}$, posons :

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n \qquad \text{où} \quad \varphi_n(\theta) = \left(1 - \eta\cos^2\theta\right)^{n/2}.$$

Grâce à a), il suffit de montrer que $I_n \to 0$.

Mais (φ_n) converge simplement vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus \{\pm\pi/2\}$, et est bornée par 1. La conclusion résulte du théorème de convergence dominée.

I.C.1.a) Puisque $U_n = (X^2-1)^n$, $U_n{}' = 2nX(X^2-1)^{n-1}$, d'où le résultat.

b) On dérive $n+1$ fois la relation de a) avec la formule de Leibniz. Il vient :

$$(X^2-1)U_n{}^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n{}^{(n+1)} + n(n+1)U_n{}^{(n)} = 2nX\,U_n{}^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n{}^{(n)}.$$

C'est la relation voulue.

2. On remarque que :

$$D(f)(x) = \frac{d}{dx}\left((1-x^2)f'(x)\right).$$

On intégre par parties en observant que $(1-x^2)f'(x)$ et $(1-x^2)g'(x)$ s'annulent en ± 1, et il vient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} D(f)\,g &= -\int_{-1}^{1}(1-x^2)\ f'(x)\ g'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1}(1-x^2)\ g'(x)\ f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} D(g)\ f\end{aligned}$$

3. La question 1.b) montre que Σ contient $\{-n(n+1),\ n \in \mathbf{N}\}$. Inversement, soit λ dans $\mathbf{R} \setminus \{-n(n+1),\ n \in \mathbf{N}\}$. Montrons que $V_\lambda = \{0\}$, ce qui donnera le résultat demandé. En appliquant la question 2 avec f dans V_λ et $g = P_m$ où $m \in \mathbf{N}$, il vient :

$$\lambda \int_{-1}^{1} f P_m = -m(m+1) \int_{-1}^{1} f P_m, \qquad \text{d'où} \quad \int_{-1}^{1} f P_m = 0.$$

D'autre part, P_n étant de degré n pour tout n, $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$, et ce qui précède implique :

$$\int_{-1}^{1} f P = 0$$

pour tout P de $\mathbf{R}[X]$. Le théorème d'approximation de Weierstrass permet classiquement d'en déduire $f = 0$.

4. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire implique que l'espace des solutions de (E) sur $]-1,1[$ est de dimension 2. Soit donc u une fonction de classe C^2 sur $]-1,1[$ telle que (u, L_n) soit une base de l'espace précédent. Pour établir que $V_{-n(n+1)} = \mathbf{C}L_n$, il suffit de voir que u ne se prolonge pas en une fonction de classe C^2 sur $[-1,1]$. Soit $W = L_n u' - {L_n}' u$. Un calcul classique assure que :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad W'(x) = \frac{2x}{1-x^2}\, W(x).$$

Il s'ensuit que :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad W(x) = \frac{W(0)}{1-x^2}.$$

D'autre part, la liberté de (u, L_n) et les propriétés usuelles du wronskien montrent que $W(0) \neq 0$. Par suite :

$$|W(x)| \underset{x \to \pm 1}{\longrightarrow} +\infty,$$

d'où la conclusion.

5. Si $u(t,x) = a(t)\, b(x)$, l'équation proposée s'écrit :

$$a''(t)\, b(x) = (1-x^2) b''(x) - 2x b'(x)\, a(t).$$

Supposons u non identiquement nulle. En choisissant t tel que $a(t) \neq 0$, on voit que b est fonction propre de D, donc colinéaire à L_n pour un certain n de $\mathbf{N}$. On a alors, en choisissant x n'annulant pas L_n, $a''(t) = -n(n+1)\, a(t)$ pour tout réel t. On en déduit que a est affine si $n = 0$, combinaison linéaire de $e_{-\sqrt{n(n+1)}}$ et $e_{\sqrt{n(n+1)}}$ si $n \geqslant 1$. En fin de compte, u est bien de la forme voulue. La réciproque est immédiate.

Partie II

A.1.a) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que : $\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0$. Soit l la forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$ qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

On a $w \in \ker l$ et, si $v \in \mathbf{Z}^n$:

$$l(2\pi v) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ \in \ \mathbf{Z}.$$

Il s'ensuit que $l(G_w) \subset \mathbf{Z}$.

b) Puisque $\mathbf{R}^n$ est de dimension finie, l est continue d'où :

$$l\left(\overline{G_w}\right) \subset \overline{l(G_w)},$$

et, puisque $\mathbf{Z}$ est fermé dans $\mathbf{R}$, $l(\overline{G_w})) \subset \mathbf{Z}$. Si G_w était dense dans $\mathbf{R}^n$, $l(\overline{G_w})$ serait égal à $l(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}$ car une forme linéaire non nulle est surjective, ce qui donne la contradication désirée. (Le a) assure en fait que G_w est contenu dans une réunion dénombrable d'hyperplans affines parallèles et régulièrement espacés de $\mathbf{R}^n$; cette réunion est trivialement un fermé de $\mathbf{R}^n$ négligeable et d'intérieur vide.)

2.a) L'application J_T est une forme n-linéaire sur $\mathcal{C}^n$, de sorte qu'il suffit de prouver le résultat quand les f_i sont des e_λ. Posons $f_i = e_{\lambda_i}$, $\lambda_i \in \mathbf{Z}$, de sorte que :

$$J_T(f_1, \ldots, f_n) = \frac{1}{T} \int_0^T e_{\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i}.$$

D'après **I.A**.1.a), cette quantité tend vers $\delta_{0,\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i}$ lorsque $T \to +\infty$. Mais la **Q**-liberté de $(w_1, \ldots, w_n)$ assure que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (w_1, \ldots, w_n) = (0, \ldots, 0),$$

d'où le résultat.

b) Munissons $\mathcal{C}^n$ de la norme produit. Il est alors immédiat que les J_T sont toutes de norme subordonnée 1, donc forment une famille équicontinue de formes n-linéaires. Un raisonnement classique montre qu'il suffit d'établir le résultat pour $(f_1, \ldots, f_n)$ appartenant à une famille dense de $\mathcal{C}^n$. Or, gr,ce au théorème de Weierstrass trigonométrique, ${\mathcal{P}_\mathbf{Z}}^n$ est dense dans $\mathcal{C}^n$ pour la norme produit, et a) permet de conclure.

c) Fixons $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{R}^n$ et ε dans $]0, \pi[$. Si $1 \leqslant j \leqslant n$, prenons pour f_j une fonction continue, 2π-périodique, strictement positive sur $]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[$, nulle sur $[x_j - \pi, x_j + \pi] \setminus]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[$. Le b) garantit :

$$J_T(f_1, \ldots, f_n) \quad \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} \quad \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j \right).$$

Le membre de droite étant dans $\mathbf{R}^{+*}$, cette relation assure l'existence d'un réel t tel que :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad f_j(w_j t) > 0.$$

On en déduit l'existence de $(m_1, \ldots, m_n)$ dans $\mathbf{Z}^n$ tel que :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad tw_j \in]2\pi m_j + x_j - \varepsilon, 2\pi m_j + x_j + \varepsilon[.$$

Pour la norme $\| \|_\infty$ sur $\mathbf{R}^n$, le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ est donc à une distance au plus ε du vecteur $t(w_1, \ldots, w_n) - 2\pi(m_1, \ldots, m_n)$ de G_w, d'où la densité désirée.

3. Il est clair que :

$$\sup g \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sup g_j.$$

Pour établir la réciproque, on considère, si $1 \leqslant j \leqslant n$, un réel x_j tel que $\sup g_j = g_j(x_j)$ (qui existe par continuité et périodicité de g_j). La question 2 donne une suite (t_k) de réels et n suites $(m_{j,k})$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ d'entiers telles que :

$$t_k(w_1, \ldots, w_n) + 2\pi(m_{1,k}, \ldots, m_{n,k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x_1, \ldots, x_n).$$

Il s'ensuit que :

$$\forall j \in \{1, \ldots n\}, \qquad g_j(w_j t_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} g_j(x_j),$$

donc que :

$$g(t_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{n} \sup g_j,$$

ce qui achève la preuve.

4. La symétrie de Λ est immédiate. Puisque Λ_γ est contenue dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$-libre, les $\gamma\Lambda_\gamma$ pour γ dans Γ sont deux à deux disjoints. On pose, si $\gamma \in \Gamma$ et si $f = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} a_\lambda e_\lambda$:

$$f_\gamma = \sum_{\lambda \in \gamma\Lambda_\gamma} a_\lambda e_\lambda.$$

On a déjà : $N(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} N(f_\gamma)$. D'autre part, f_γ est de la forme $x \mapsto g_\gamma(\gamma_x)$ où g_γ appartient à $\mathcal{P}^{\mathbf{R}}_{\Lambda_\gamma}$. La question 3 entraîne alors :

$$\sup f = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sup g_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sup f_\gamma.$$

Reste à écrire $N(f_\gamma) \leqslant K'(\Lambda) \sup f_\gamma$ et à sommer sur $\gamma \in \Gamma$ pour obtenir, compte-tenu de ce qui précède : $N(f) \leqslant K'(\Lambda) \sup f$.

B.I.1.a) Ecrivons d'abord :

$$\begin{aligned} R_k^\varphi &= \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{e^{i\varphi_j} e_{\lambda_j} + e^{-i\varphi_j} e_{-\lambda j}}{2}\right) \\ &= \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{-1,0,1\}^k} \frac{e^{i\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j \varphi_j\right)}}{2^{|\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_k|}} \, e_{\sum_{j=1}^k \varepsilon_j \varphi_j} \end{aligned}$$

L'hypothèse de dissociation montre que le seul $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ de $\{-1,0,1\}^k$ tel que $\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \lambda_j = 0$ est $(0, \ldots, 0)$, d'où : $\widehat{R_k^\varphi}(0) = 1$. Elle implique de même que le seul k-uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ de $\{-1,0,1\}^k$ tel que $\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \lambda_j = \lambda_m$ est :

$$\Big(0, \ldots, 0, \underset{m\text{ième place}}{1}, 0, \ldots, 0\Big)$$

d'où : $\widehat{R_k^\varphi}(\lambda_m) = e^{i\varphi_m}/2$. De même $\widehat{R_k^\varphi}(-\lambda_m) = e^{-i\varphi_m}/2$.

b) La formule de Parseval assure :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p \; R_k^\varphi = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{p}(n) \; \widehat{R_k^\varphi}(-n).$$

Vu que p est dans $\mathcal{P}_\Lambda$, a) implique alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p R_k^\varphi = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(e^{-i\varphi_n} \hat{p}(\lambda_n) + e^{i\varphi_n} \hat{p}(-\lambda_n) \right).$$

Mais p étant à valeurs réelles : $\hat{p}(-\lambda_m) = \overline{\hat{p}(\lambda_m)}$ si $m \in \mathbf{Z}$ et, en choisissant k pour que λ_k soit supérieur ou égal au degré du polynôme trigonométrique p :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p \; R_k^\varphi = \sum_{m \geqslant 1} \operatorname{Re} \; \left(e^{-i\varphi_m} \hat{p}(\lambda_m) \right).$$

En prenant, pour tout $m \geqslant 1$, φ_m dans $\mathbf{R}$ tel que $e^{-i\varphi_m} \hat{p}(\lambda_m) \in \mathbf{R}^+$, on a le résultat désiré.

c) Avec les notations de b) et en tenant compte de la positivité de R_k^φ, il vient :

$$\sum_{m=1}^{k} |\hat{p}(\lambda_m)| \;\leqslant\; \frac{\sup p}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_k^\varphi \;\leqslant\; \sup p$$

car $\widehat{R_k^\varphi}(0) = 1$. Puisque p est à valeurs réelles, on en tire aussitôt :

$$\sum_{m=1}^{k} |\hat{p}(-\lambda_m)| \;\leqslant\; \sup p,$$

d'où, en sommant : $N(p) \leqslant 2 \sup p$. C'est le résultat voulu.

2. Soient $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j \geqslant 1}$ et $\varepsilon' = (\varepsilon'_j)_{j \geqslant 1}$ deux suites presque nulles d'éléments de $\{-1,0,1\}$ telles que :

$$\sum_{j \geqslant 1} \varepsilon_j \lambda_j = \sum_{j \geqslant 1} \varepsilon'_j \lambda_j.$$

Supposons par l'absurde $\varepsilon \neq \varepsilon'$, et notons $N = \max \left\{ j \geqslant 1, \; \varepsilon_j \neq \varepsilon'_j \right\}$. On a alors :

$$(\varepsilon'_N - \varepsilon_N)\lambda_N = \sum_{j=1}^{N-1} (\varepsilon_j - \varepsilon'_j)\lambda_j \quad \text{d'où} \quad \lambda_N \geqslant \sum_{j=1}^{N-1} 2\lambda_j$$

vu que $|\varepsilon_j - \varepsilon'_j| \leqslant 2$ si $1 \leqslant j \leqslant N-1$ et $|\varepsilon'_N - \varepsilon_N| \geqslant 1$. Or, si $j \leqslant N-1$:

$$\lambda_j \leqslant \frac{\lambda_N}{3^{N-j}} \quad \text{d'où} \quad \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j \leqslant \lambda_N \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{3^{N-j}} \cdot$$

La contradiction résulte alors de :

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{3^{N-j}} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \cdot$$

Partie III

A.1.a) Si $G = \{0\}$, le résultat est trivial. Supposons $G \neq \{0\}$ de sorte que $G \cap \mathbf{R}^{+*} \neq \{0\}$ gr,ce à la stabilité de G par passage à l'opposé. L'hypothèse donne l'existence de $c = \min(G \cap \mathbf{R}^{+*})$. Montrons alors que $G = c\mathbf{Z}$. Puisque G contient c, il contient $c\mathbf{Z}$. Soit inversement g dans G. On écrit $g = qc + r$ avec $q \in \mathbf{Z}$ et $0 \leqslant r < c$. Il vient $r = g - qc$ d'où $r \in G$ et, par définition de c : $r = 0$, $g = \lambda c$ et $g \in c\mathbf{Z}$.

b) L'exponentielle est un isomorphisme strictement croissant et bicontinu de $(\mathbf{R}, +)$ sur $(\mathbf{R}^{+*}, \times)$. La question a) montre alors que les sous-groupes de $(\mathbf{R}^{+*}, \times)$ dont l'intersection avec $[1, +\infty[$ admet 1 comme point isolé sont les $c^{\mathbf{Z}} = \{c^n,\ n \in \mathbf{Z}\}$ avec $c \in [1, +\infty[$.

2.a) Déjà :

$$x - y\sqrt{m} = \frac{1}{x + y\sqrt{m}}$$

est dans $]0, 1[$ donc $-x + y\sqrt{m}$ est dans $]-1, 0[$. Ainsi : $x + y\sqrt{m} > x - y\sqrt{m} > -x + y\sqrt{m}$. On en déduit $x > 0$, $y > 0$, d'où : $(x, y) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x + y\sqrt{m} \geqslant 1 + \sqrt{m}$.

b) Le a) montre que 1 est point isolé de $G_m \cap [1, +\infty[$. Il suffit de vérifier que G_m est un sous-groupe de $(\mathbf{R}^{+*}, \times)$ pour conclure via la question 1.b).

Soient donc g et g' dans G_m : $g = x + y\sqrt{m}$, $g' = x' + y'\sqrt{m}$ avec $(x, y, x', y') \in \mathbf{Z}^4$, $g > 0$, $g' > 0$ et $x^2 - my^2 = x'^2 - my'^2 = 1$. Alors $gg' = xx' + myy' + \sqrt{m}\,(xy' + x'y)$ est bien de la forme $u + v\sqrt{m}$ avec $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ et $u^2 - mv^2 = 1$ vu que :

$$\begin{aligned}
(xx' + myy')^2 - m\,(x'y + xy')^2 &= x^2x'^2 + m^2y^2y'^2 - mx'^2y^2 - mx^2y'^2 \\
&= \left(x^2 - my^2\right)\left(x'^2 - my'^2\right) = 1
\end{aligned}$$

D'autre part, $1/g = x - y\sqrt{m}$ est clairement dans G_m. Enfin G_m contient 1.

3. L'indication proposée montre, si $n(n+1) = q\lambda^2$, que $2n + 1 + \lambda\sqrt{4q}$ est dans G_{4q}.

Si $G_{4q} = \{1\}$ ceci implique $2n + 1 + \lambda\sqrt{4q} = 1$, ce qui est incompatible avec $(n, \lambda) \in (\mathbf{N}^*)^2$, d'où la vacuité de A_q. Notons que tel est le cas si $q = 1$ car $x^2 - 4y^2 = 1$ s'écrit $(x - 2y)(x + 2y) = 1$ d'où, si $x + 2y \in \mathbf{N}^*$, $x + 2y = 1$.

Si $G_{4q} \neq \{1\}$, la question 2.b) donne $\gamma_{4q} = \gamma$ dans $[1 + 2\sqrt{q}, +\infty[$ tel que $G_{4q} = \{\gamma^n,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Avec les notations de la question, on obtient donc $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $(2n + 1) + \lambda\sqrt{4q} = \gamma^m$. On en déduit $(2n + 1) - \lambda\sqrt{4q} = \gamma^{-m}$, puis par soustraction :

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{q}}\left(\gamma^m - \frac{1}{\gamma^m}\right).$$

Posons donc, si $j \geqslant 1$:
$$\lambda_{j,q} = \frac{1}{4\sqrt{q}}\left(\gamma^j - \frac{1}{\gamma^j}\right).$$
On a, si $j \in \mathbf{N}^*$: $\lambda_{j+1,q} \geqslant \gamma\lambda_{j,q}$, et le résultat désiré s'ensuit.

B.1. On a d'abord : $K(\sqrt{a}) = \left\{x + y\sqrt{a},\ (x,y) \in K^2\right\}$. Si $\sqrt{b} \in K(\sqrt{a})$, on a donc $\sqrt{b} = x + y\sqrt{a}$ où $(x,y) \in K^2$ et $b = x^2 + ay^2 + 2xy\sqrt{a}$. Puisque $\sqrt{a} \notin K$, ceci implique $xy = 0$. L'égalité $y = 0$ implique $b = x^2$, $\sqrt{b} \in K$, ce qui est exclu. Il en résulte que $\sqrt{b/a} \in K$, puis que $\sqrt{ab} \in K$. Réciproquement, supposons $\sqrt{ab} \in K$. Alors $\sqrt{b} = \sqrt{ab}/\sqrt{a}$ est dans $K(\sqrt{a})$.

2.a) Pour $m = 0$, l'assertion proposée revient à : $\sqrt{q_1 \cdots q_m} \notin \mathbf{Q}$. Ceci est vrai car les q_i sont des nombres premiers deux à deux distincts, donc $q_1 \cdots q_m$ n'est pas un carré dans $\mathbf{Q}$.

Supposons l'assertion vraie au rang $m-1$ avec $m \in \mathbf{N}^*$, et soient $p_1, \ldots, p_m,\ q_1, \ldots, q_n$ comme dans le texte. On veut montrer que $\sqrt{q_1 \cdots q_n}$ n'appartient pas à $K(\sqrt{p_m})$ où $K = \mathbf{Q}\left(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{m-1}}\right)$. Dans le cas contraire, a) impliquerait $\sqrt{q_1 \cdots q_n p_m} \in K$, et l'hypothèse de récurrence donnerait une contradiction car $q_1, \cdots, q_n, p_m, p_1, \ldots, p_{m-1}$ sont des nombres premiers deux à deux distincts. Le résultat suit.

b) Rangeons les nombres premiers en une suite strictement croissante $(p_i)_{i\geqslant 1}$ et posons, pour $n \in \mathbf{N}$:
$$Q_n = \left\{\prod_{i=1}^{n} {p_i}^{\alpha_i},\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n\right\}$$
(en convenant que $Q_0 = \{1\}$) de sorte que $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante pour l'inclusion et que $Q = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} Q_n$. Supposons $(\sqrt{q})_{q\in Q}$ liée. On dispose alors de $n = \min\{m \in \mathbf{N},\ (\sqrt{q})_{q\in Q_m} \text{ liée}\}$. Cette définition de n donne a et b dans $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$ non nuls tels que $a + b\sqrt{p_n} = 0$. Il s'ensuit que $\sqrt{p_n}$ appartient à $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}})$, ce qui contredit a).

3. Par définition :
$$\Lambda = \{\varepsilon\lambda_{j,q}\sqrt{q} \mid \varepsilon \in \{\pm 1\},\ q \in Q,\ j \in \mathbf{N}^*\} = \bigcup_{q\in Q} \sqrt{q}B_q$$
avec $B_q = A_q \cup (-A_q)$. Puisque $1 + 2\sqrt{q} \geqslant 3$, B_q est, d'après **II.B**.2, une partie dissociée de $\mathbf{Z}$ donc, grâce à **II.B**.1.c), un ensemble de Sidon réel avec de plus $K'(B_q) \leqslant 2$. Le résultat de **III.B**.2 permet alors d'appliquer **II.A**.4, qui amène la conclusion désirée.

Partie IV

A.1. On a, si $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t)\ e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

d'où $|a_k| \leqslant \|p\|_\infty$. Mais $p' = \sum_{k=1}^{n} ika_k e_k$ est borné par $\sum_{k=1}^{n} k|a_k|$, d'où le résultat voulu.

2. Par continuité et périodicité, il existe t_0 dans $\mathbf{R}$ tel que $|p(t_0)| = \|p\|_\infty$. Soit δ dans $\mathbf{R}^{+*}$. Si $\delta\alpha_n\|p\|_\infty \leqslant \|p\|_\infty/2$, i.e. si $\delta\alpha_n \leqslant 1/2$, le théorème des accroissements finis assure que $|p|$ est minoré par $\|p\|_\infty/2$ sur $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, d'où le résultat demandé.

B.1. On a, pour x dans $\mathbf{R}$:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad e^{x^2/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!\ 2^k}\ .$$

Compte-tenu de la positivité de x^{2k}, il suffit pour conclure de vérifier que, pour tout k de $\mathbf{N}$: $k!\ 2^k \leqslant (2k)!$. Or :

$$\frac{(2k)!}{k!\ 2^k} = \frac{(k+1)(k+2)\cdots 2k}{2^k}\ .$$

Si $k \geqslant 1$, les k entiers $k+1, k+2, \ldots, 2k$ sont minorés par 2, et le résultat est clair ; le cas $k = 0$ est trivial.

2. On a :

$$E\left(\exp\left(\lambda \text{ Re } Z\right)\right) = E\left(\exp\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} (\text{ Re } a_k)\ X_k\right)\right).$$

L'indépendance des X_k entraîne :

$$E\left(\exp\left(\lambda \text{ Re } Z\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(\exp\left(\lambda(\text{ Re } a_k)\ X_k\right)\right).$$

Or $E\left(\exp\left(\lambda(\text{ Re } a_k)\ X_k\right)\right) = \operatorname{ch}\left(\lambda \text{ Re } a_k\right)$. Au total :

$$E\left(\exp\left(\lambda \text{ Re } Z\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\lambda \text{ Re } a_k\right).$$

3.a) On a de même :

$$E\left(\exp\left(-\lambda \text{ Re } Z\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\lambda \text{ Re } a_k\right).$$

Mais :

$$e^{\lambda|\text{ Re } Z|} \leqslant e^{\lambda \text{ Re } Z} + e^{-\lambda \text{ Re } Z} \qquad \text{d'où} \quad E\left(e^{\lambda|\text{ Re } Z|}\right) \leqslant 2\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\lambda \text{ Re } a_k\right).$$

Or, par 1 :

$$\operatorname{ch}\left(\lambda \text{ Re } a_k\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\,|\text{ Re } a_k|^2\right).$$

Le résultat s'en déduit.

b) Une preuve tout à fait analogue donne :

$$E\left(e^{\lambda|\ \mathrm{Im}\ z|}\right) \leqslant 2\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n}|\ \mathrm{Im}\ a_k|^2\right).$$

D'autre part, l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent :

$$E\left(e^{\lambda|Z|}\right) \leqslant E\left(e^{\lambda|\ \mathrm{Re}\ Z|}e^{\lambda|\ \mathrm{Im}\ Z|}\right) \leqslant \sqrt{E\left(e^{2\lambda|\ \mathrm{Re}\ Z|}\right)\ E\left(e^{2\lambda|\ \mathrm{Im}\ Z|}\right)},$$

d'où le résultat.

C.1.a) On a :

$$\int_0^{2\pi}\exp\left(\lambda\left|Z_t(\omega)\right|\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\exp\left(\lambda|p_\omega(t)|\right)\,\mathrm{d}t.$$

D'après **IV.A**.3 et par périodicité de p_ω, il existe une partie de $[0,2\pi]$ constituée d'un ou deux segments, de mesure $1/\alpha_n$, sur laquelle $|p_\omega|$ est minoré par $M(\omega)/2$. Le résultat suit alors par positivité de exp.

b) Gr,ce à a) :

$$\frac{1}{\alpha_n}E_\omega\left(e^{\lambda M/2}\right) \leqslant E_\omega\left(\int_0^{2\pi}e^{\lambda|Z_t(\omega)|}\,\mathrm{d}t\right).$$

Mais le théorème de Fubini (qui revient dans ce cas à permuter une somme finie et une intégrale) donne :

$$E_\omega\left(\int_0^{2\pi}e^{\lambda|Z_\omega(t)|}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{2\pi}E_\omega\left(e^{\lambda|Z_t(\omega)|}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Or, gr,ce à la question **IV.B**.3.b) :

$$E_\omega\left(e^{\lambda|Z_t(\omega|}\right) \leqslant 2\exp\left(\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right).$$

On en déduit la majoration annoncée.

2.a) Il existe ω dans Ω tel que :

$$\exp\left(\frac{\lambda M(\omega)}{2}\right) \leqslant E\left(e^{\lambda M/2}\right)$$

donc tel que :

$$\frac{\lambda M(\omega)}{2} \leqslant \ln\left(4\pi\alpha_n\right) + \lambda^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2.$$

Le résultat suit.

b) Le résultat de a) s'applique pour tout $\lambda > 0$. On l'optimise en prenant :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}},$$

et on obtient l'inégalité de Salem-Zygmund.

(La conséquence de l'inégalité de Salem-Zygmund utilisée dans la partie **V** pourrait être remplacée par la construction de la suite de polynômes de Rudin-Shapiro, plus élémentaire mais n'utilisant pas d'arguments probabilistes.)

3. Prenons :

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \in \Lambda \\ 0 & \text{si} \quad k \notin \Lambda \end{cases},$$

et appliquons 2.b) pour obtenir ω dans Ω tel que :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(\omega)\, e_k \right\|_\infty \leqslant 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n)\, |\Lambda \cap \{1,\ldots,n\}|}.$$

Puisque Λ est de Sidon, on a aussi :

$$K(\Lambda)\ \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(\omega) e_k \right\|_\infty \geqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k X_k(\omega|\,.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k X_k(\omega| = |\Lambda \cap \{1,\ldots,n\}|$. On en déduit le résultat demandé.

Partie V

1. La question **I.B**.3.b) assure que (L_k) converge uniformément vers 0 sur I_η. Gr,ce au théorème de Cesàro, on en déduit :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sup\{|L_k(x)|,\ x \in I_\eta\} \quad \to \quad 0.$$

Mais, si $(t,x) \in \mathbf{R} \times I_\eta$:

$$|u_n(t,x)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sup\{|L_k(x)|\,,\ x \in I_\eta\}\,,$$

d'où le résultat.

2. Gr,ce à **I.B**.2, on a :

$$u_n(t,1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,n} e^{i\sqrt{k(k+1)}t}.$$

Les résultats de **III.B**.3 et **I.A**.2.b) montrent que $\Lambda = \left\{\sqrt{k(k+1)},\ k \in \mathbf{N}^*\right\}$ est un ensemble de Sidon avec $K(\Lambda) \leqslant 4$. Il s'ensuit que $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |u(t,1)| \geqslant 1/4$. On montre de même : $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |u_n(t,-1)| \geqslant 1/4$.

3.a) Ecrivons, avec **I.B**.1.b) :

$$\begin{aligned} v_n(t,x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_{k,n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)^k \,\mathrm{d}\theta\; e^{i(2k+1)t/2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{k,n}\left(\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)e^{i(2k+1)t/2}\right)^k \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}R_n\left(\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)e^{i(2k+1)t/2}\right)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

On a :

$$\left|\left(x+i\sqrt{1-x^2}\in\theta\right)e^{i(2k+1)t/2}\right|^2 = x^2+(1-x^2)\sin^2\theta \leqslant 1.$$

Le principe du maximum entraîne, pour tout (t,x,θ) de $\mathbf{R}\times[-1,1]\times[-\pi,\pi]$:

$$\left|R_n\left(\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)e^{i(2k+1)t/2}\right)\right| \leqslant \sup_{u\in\mathbf{R}}\left|R_n(e^{iu})\right|.$$

Le résultat suit.

b) La question précédente et le choix de R_n assurent :

$$\forall (t,x)\in\mathbf{R}\times[-1,1],\qquad |v_n(t,x)|\leqslant 4\sqrt{\frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Il reste à montrer que (v_n-u_n) converge uniformément vers 0 sur $[-T,T]\times[-1,1]$ pour conclure. Or :

$$\begin{aligned} |v_n(t,x)-u_n(t,x)| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\delta_{k,n}L_k(x)\left(e^{i(k+1/2)t}-e^{i\sqrt{k(k+1)}t}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|e^{i(k+1/2)t}-e^{i\sqrt{k(k+1)}t}\right| \end{aligned}$$

car $|L_k|$ est majoré par 1 sur $[-1,1]$ gr,ce à **I.B**.2. Vu que $\varphi\mapsto e^{i\varphi}$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$, on a, si $t\in[-T,T]$:

$$\begin{aligned} \left|e^{i(k+1/2)t}-e^{i\sqrt{k(k+1)}t}\right| &\leqslant \left|(k+1/2)-\sqrt{k(k+1)}\right|.|t| \\ &\leqslant \left|k+1/2-\sqrt{k(k+1)}\right|\; T. \end{aligned}$$

La conclusion résulte du développement limité :

$$\sqrt{k(k+1)} = k\sqrt{1+1/k} = k\left(1+\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = k+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{k}\right).$$