

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Notations et définitions

- Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^p , on note C_Ω l'espace vectoriel des fonctions de Ω dans \mathbf{R} qui sont de classe \mathcal{C}^∞ .
- Dans tout le problème, on appellera *difféomorphisme* entre deux ouverts de \mathbf{R}^p une bijection entre ces deux ouverts qui est de classe \mathcal{C}^∞ ainsi que sa réciproque.
- Si I est un intervalle on note I^2 le carré $I \times I$ de \mathbf{R}^2 .
- Soit I un intervalle ouvert et f un élément de C_I . On dit que $x_0 \in I$ est un *point critique* de f si $f'(x_0) = 0$. Une *valeur critique* de f est un réel de la forme $f(x_0)$ où x_0 est un point critique. On dit qu'un point critique x_0 est *non dégénéré* si $f''(x_0)$ est non nul.
- Si A et B sont deux parties du plan \mathbf{R}^2 on dira que A et B sont *de même type* s'il existe deux intervalles ouverts I et J et un difféomorphisme ϕ de I^2 sur J^2 tels que :

$$A \subset I^2, \quad B \subset J^2, \quad \phi(A) = B$$

Objet du problème

Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbf{R} . Pour toute fonction f élément de C_I , et pour tout réel λ on définit la partie de \mathbf{R}^2 :

$$E_\lambda(f) = \{(x, y) \in I^2, f(x) + f(y) = \lambda\}$$

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés des ensembles $E_\lambda(f)$.

I. Préliminaires et exemples

I.A. Généralités

1. Soit I un intervalle ouvert quelconque de \mathbf{R} , et f un élément de C_I .
 - (a) Déterminer $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f)$ (pour λ, μ distincts) et $\cup_{\lambda \in \mathbf{R}} E_\lambda(f)$.
 - (b) Démontrer que pour tout λ , $E_\lambda(f)$ est un fermé de I^2 , et trouver une symétrie commune à tous les $E_\lambda(f)$.

- (c) Soit $x_0 \neq 0$. On pose $g(x) = f(x + x_0)$. Préciser l'intervalle de définition de g . Quelle transformation géométrique envoie $E_\lambda(g)$ sur $E_\lambda(f)$?
2. Déterminer selon la valeur de λ , l'ensemble $E_\lambda(f)$ lorsque la fonction f est définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2$.
3. On prend dans cette question la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x - x^3$. Démontrer que $E_0(f)$ est la réunion d'une droite et d'une ellipse.
4. On prend dans cette question la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 - x^3$. Démontrer que $E_0(f)$ est la réunion du point $(0,0)$ et d'une courbe dont on donnera une équation polaire et qu'on tracera sommairement, par exemple à l'aide d'une calculatrice graphique.

I.B. Racine carrée d'une fonction positive

5. Dans cette question, on note $I =]a, b[$ un intervalle contenant 0 ($a, b \in \overline{\mathbf{R}}$). On suppose de plus que la fonction $f \in C_I$ vérifie l'hypothèse suivante :

(H) 0 est l'unique point critique de f et il est non dégénéré ; on a $f(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

- (a) Expliciter les variations de f .
- (b) On pose $g(x) = \int_0^1 (1-u)f''(xu)du$.
Établir l'égalité $f(x) = x^2 g(x)$.
- (c) Démontrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ et strictement positive sur $]a, b[$.
- (d) Construire une fonction h croissante et de classe \mathcal{C}^∞ sur I telle que pour tout x on ait $f(x) = h(x)^2$. Justifier que h est un difféomorphisme de I sur un intervalle J qu'on précisera en fonction de f .

Définition : la fonction h ainsi définie sera appelée racine carrée de f .

I.C. Ovale du plan

On reprend les notations de la question 5. en supposant toujours que f vérifie l'hypothèse (H).

6. En utilisant la racine carrée de f , démontrer que pour $\lambda > 0$ l'ensemble $E_\lambda(f)$ est de même type que l'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 = \lambda$ et du carré J^2 .

Définition : dans la suite du problème, on appellera **ovale** toute partie du plan qui est de même type qu'un cercle.

7. Une application

On considère le système différentiel (S) suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) &= -y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions inconnues de la variable t . Soit $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, (x_0, y_0) \neq (1, 1)$.

On note : $t \rightarrow (x(t), y(t))$ l'unique solution maximale de (S) vérifiant $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

- (a) Établir que les fonctions x et y ne peuvent pas s'annuler.
- (b) Démontrer que le support de l'arc paramétré $t \mapsto (x(t), y(t))$ est inclus dans un ovale que l'on caractérisera à l'aide de x_0, y_0 et de la fonction g définie pour $x > 0$ par $g(x) = x - 1 - \ln(x)$.

II. Un problème de dénombrement

On rappelle le résultat suivant : si $z \rightarrow g(z)$ est une fonction d'une variable complexe holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon r , alors elle est somme sur ce disque ouvert d'une série entière convergente.

1. On pose, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

(a) Résoudre l'équation $\cos(z) = 0$.

(b) Établir l'existence d'une suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres **réels** tels que pour tout complexe z de module assez petit on ait :

$$\frac{\sin(z) + 1}{\cos(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

(il n'est pas demandé de calculer les coefficients b_n).

(c) Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbf{C} \setminus \{z, \cos(z) = 0\}$ par $H(z) = \frac{\sin(z)+1}{\cos(z)} + \frac{4}{2z-\pi}$ possède un prolongement holomorphe sur le disque ouvert $\{z, |z| < \frac{3\pi}{2}\}$.

(d) En déduire que $b_n \sim \frac{2^{n+2}n!}{\pi^{n+1}}$.

2. Permutations alternantes

On donne a_0, \dots, a_{n-1} , n nombres réels distincts rangés par ordre croissant : $a_0 < \dots < a_{n-1}$. Soit σ une permutation de l'ensemble $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. On dit que σ est *alternante* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\sigma(a_{2i}) < \sigma(a_{2i+1}) \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 < 2i + 1 \leq n - 1$$

$$\sigma(a_{2i-1}) > \sigma(a_{2i}) \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 < 2i \leq n - 1$$

On dit que σ est *antialternante* si elle vérifie les inégalités inverses. On note e_n le nombre de permutations alternantes (par convention $e_0 = e_1 = 1$).

(a) Déterminer toutes les permutations alternantes ainsi que l'entier e_n lorsque $n = 2, 3$ ou 4 .

(b) Démontrer qu'il y a (pour $n \geq 2$) autant de permutations alternantes que de permutations anti-alternantes.

(c) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$2e_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e_i e_{n-i}$$

Indication : pour une permutation σ de $\{a_0, \dots, a_n\}$, on pourra considérer l'indice j tel que $\sigma(a_j) = a_0$.

(d) En conclure que pour tout n , $e_n = b_n$.

III. Les serpents d'Arnold

Dans cette partie, $I = \mathbf{R}$.

On se propose d'étudier la topologie de $E_\lambda(f)$ pour une famille de fonctions appelées *serpents d'Arnold*. Un entier $n > 0$ étant donné, on fixe n réels $a_0 < \dots < a_{n-1}$ tels que les sommes $a_i + a_j$ pour $i \leq j$ soient toutes distinctes.

On note \mathcal{A}_n l'ensemble des fonctions f de \mathbf{R} dans lui-même qui vérifient les propriétés suivantes :

– f est de classe \mathcal{C}^∞ ;

- f possède exactement n points critiques, $x_0(f) < \dots < x_{n-1}(f)$ et ils sont tous non dégénérés ;
- Les valeurs critiques de f sont a_0, \dots, a_{n-1} .
Autrement dit, il existe une permutation σ_f de a_0, \dots, a_{n-1} telle que, pour tout i , $f(x_i(f)) = \sigma_f(a_i)$. La permutation σ_f s'appelle permutation associée à f ;
- $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$;
- $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Définition : un élément f de \mathcal{A}_n s'appelle un serpent à n points critiques.

Remarque : pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note x_0, \dots, x_{n-1} les points critiques de f . De même, la notation \mathcal{A}_n est en réalité une abréviation pour $\mathcal{A}_n(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Classes d'équivalence de serpents

1. Soit $f \in \mathcal{A}_n$. Préciser les variations de f selon la parité de n .
2. (a) Démontrer que la relation \sim définie par « $f \sim g$ si et seulement s'il existe un difféomorphisme croissant h de \mathbf{R} tel que $f = g \circ h$ » est une relation d'équivalence sur \mathcal{A}_n .
(b) Démontrer que si $f \sim g$ alors pour tout λ , $E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(g)$ sont de même type.
3. Soit h un difféomorphisme croissant de \mathbf{R} . Démontrer que $f \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow f \circ h \in \mathcal{A}_n$, et qu'alors $\sigma_f = \sigma_{f \circ h}$.
4. Réciproquement on suppose que f et g sont deux éléments de \mathcal{A}_n qui vérifient $\sigma_f = \sigma_g$.
(a) Démontrer qu'il existe une unique bijection h croissante de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telle que $f = g \circ h$ et $h(x_k(f)) = x_k(g)$.
(b) En utilisant la partie I, démontrer que h est un difféomorphisme.
5. (a) Démontrer que le nombre de classes d'équivalence de \sim est majoré par l'entier b_n défini dans la partie II.
(b) On admet que si $[\lambda, \mu]$ ne contient aucun élément $a_i + a_j$, les ensembles $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont de même type. En déduire un majorant du nombre de types des $E_\lambda(f)$, lorsque λ parcourt \mathbf{R} et f parcourt \mathcal{A}_n .

Topologie de $E_\lambda(f)$ dans le cas non critique

On se propose dans les questions qui suivent de décrire la topologie de $E_\lambda(f)$ lorsque f est un élément de \mathcal{A}_n et que le réel λ n'est pas de la forme $a_i + a_j$.

On note $I_0 =]-\infty, x_0]$, $I_n = [x_{n-1}, \infty[$, et pour k variant de 1 à $n-1$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$.

6. Sous-graphes
(a) Vérifier que $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ est, pour tout (i, j) , l'ensemble vide ou le graphe d'une fonction strictement monotone continue définie sur un intervalle fermé inclus dans I_i .

Définition : lorsque l'intersection $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ est non vide, on convient de l'appeler un **sous-graphe** de $E_\lambda(f)$.

- (b) Démontrer que les extrémités du sous-graphe $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ sont sur la frontière du rectangle $I_i \times I_j$.
- (c) Démontrer que chaque extrémité d'un sous-graphe appartient à exactement un autre sous-graphe et que deux sous-graphes ne peuvent avoir d'autre point commun qu'une extrémité.
- (d) Démontrer que, si n est impair, tous les sous-graphes sont bornés et que si n est pair il y en a exactement 2 qui sont non bornés.

7. Composantes connexes de $E_\lambda(f)$

- (a) Démontrer que toute composante connexe est une union $\cup_{i=1}^p S_i$ de sous-graphes tels que S_i et S_{i+1} (pour i variant de 1 à $p-1$) ont une extrémité commune.
- (b) En déduire que lorsque n est pair il y a exactement une composante connexe non bornée.
- (c) Lorsque C est une composante connexe bornée, construire une bijection continue du cercle unité S^1 sur C

On peut alors démontrer, mais nous ne le ferons pas, que C est un ovale.

- 8. Démontrer que le nombre d'ovales est inférieur ou égal à $\left[\frac{n+1}{2}\right]^2$ (où $[\cdot]$ désigne la partie entière).
- 9. Dans cette question on choisit $n = 2$.
 - (a) Illustrer le fait que les composantes ne sont pas forcément des ovales lorsque λ est l'un des $a_i + a_j$
 - (b) Démontrer qu'il y a au maximum 4 ensembles $E_\lambda(f)$ de types différents quand λ décrit \mathbf{R} .

IV. Réalisation polynomiale des serpents

On garde les notations de la partie précédente. L'entier n est supposé supérieur ou égal à 2. On souhaite démontrer le théorème (T) suivant, dû au mathématicien René Thom :

(T) Pour toute $f \in \mathcal{A}_n$ il existe un polynôme P de degré $n+1$ tel que $f \sim P$.

Il en résulte que les différents ensembles $E_\lambda(f)$ vus ci-dessus sont tous de même type qu'une courbe algébrique.

Notations

On note Ω_1 et Ω_2 les deux ouverts de \mathbf{R}^{n-1} définis par :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}\}, \\ \Omega_2 &= \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, 0 < y_1, \text{ et pour tout } i > 0, y_{2i-1} > y_{2i} \text{ et } y_{2i} < y_{2i+1}\}.\end{aligned}$$

Si $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ est un élément de Ω_1 , on note P_x le polynôme de degré n défini par

$$P_x(t) = t(x_1 - t) \cdots (x_{n-1} - t)$$

Enfin, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on définit un polynôme $Q_{i,x}$ en posant $Q_{i,x}(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{P_x(u)}{x_i - u} du$.

A. Deux lemmes de topologie et un d'algèbre

1. Soient U et V deux ouverts connexes de \mathbf{R}^{n-1} et ϕ une application continue de U dans V . On fait les deux hypothèses suivantes :

H1 : l'image par ϕ de tout ouvert de U est un ouvert de V ;

H2 : l'image réciproque par ϕ de tout compact de V est un compact de U .

Démontrer que ϕ est surjective.

2. Soit E_n l'ensemble des polynômes unitaires (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) de degré n à coefficients réels. Démontrer que $\inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt$ est un réel **strictement** positif.

Dans la suite, on notera $C = \inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt$.

3. Soient R_1, \dots, R_{n-1} , $n-1$ polynômes de degré inférieur ou égal à $n-2$, linéairement indépendants et (t_1, \dots, t_{n-1}) , $n-1$ réels distincts. Démontrer que le déterminant $\det(R_i(t_j))$ est non nul.

B. Le théorème (T)

Soit Φ l'application :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\rightarrow \Omega_2 \\ x &\mapsto \left(\int_0^{x_1} P_x(t) dt, \dots, \int_0^{x_{n-1}} P_x(t) dt \right) \end{aligned}$$

Afin d'alléger les notations, le vecteur $\Phi(x)$ sera noté (y_1, \dots, y_{n-1}) .

4. Justifier que cette application est bien définie, exprimer ses dérivées partielles en fonction des polynômes $Q_{i,x}$ et en déduire que Φ vérifie l'hypothèse **H1**.
5. Pour $x \in \Omega_1$ démontrer l'inégalité :

$$\left| y_1 + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i (y_{i+1} - y_i) \right| \geq C(x_{n-1})^{n+1}.$$

6. Démontrer que Φ vérifie l'hypothèse **H2** et en déduire le théorème (T).