ministère Éducation nationale

EAE MAT 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2009

CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Notations et préliminaires

Tous les corps figurant dans le problème sont supposés commutatifs.

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels
- $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls
- Pour tous entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$, l'ensemble $[\![a, b]\!]$ désigne $[a, b] \cap \mathbf{N}$
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels
- $\mathbf{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels non nuls
- $\mathbf{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs
- $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes
- $\mathbf{C}^*$ désigne l'ensemble des nombres complexes non nuls
- $\mathbf{K}$ étant un corps, on note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$, pour tout nombre entier naturel n
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbf{K}$
- $GL_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{K})$. Si $A \in GL_n(\mathbf{K})$, on note A^{-1} son inverse
- On dira que deux sous-espaces vectoriels V et W de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{K})$ sont **conjugués** s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que

$$W = P^{-1}VP = \{P^{-1}MP \,; M \in V\}.$$

- I_n désigne l'élément unité de $M_n(\mathbf{K})$.
- Pour A dans $M_n(\mathbf{K})$ on désigne par ${}^tA$ la transposée de A, tr$A$ la trace de A, det$A$ le déterminant de A et P_A son polynôme caractéristique sur $\mathbf{K}$ c'est-à-dire $P_A(X) = \det(A - XI_n)$
- Pour E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et Id_E l'application identité sur E.
- Si u est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on pose $Sp(u)$ le spectre de u, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de u.
- Pour u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et pour $\lambda \in Sp(u)$ on pose $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_E)$ le sous-espace propre de u associé à λ.

Objet du problème

Dans ce problème, on se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{K})$ constitués de matrices diagonalisables.

Plus précisément, si n est un entier $\geqslant 1$ et $\mathbf{K}$ un corps, on note $\mathbf{MT}(n, \mathbf{K})$ l'affirmation suivante :

- Pour toutes matrices A et B diagonalisables dans $M_n(\mathbf{K})$, la propriété

  (a) A et B commutent

  est équivalente à la propriété

  (b) Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{K})$.

L'un des objectifs de ce problème est de montrer que cette affirmation est vraie dans le cas complexe c'est-à-dire que $\mathbf{MT}(n, \mathbf{C})$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, qui est un résultat dû à Motzkin-Taussky, 1952.

Dans toute la suite, lorsqu'il sera demandé d'étudier l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbf{K})$, il faudra examiner successivement si les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (a)$ sont vraies.

Les parties **I**, **II** et **III** peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

I-A : Le sens direct et le cas $n = 2$

1. Soit $\mathbf{K}$ un corps et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
   On considère u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u c'est-à-dire que si F est un sous-espace propre de v, on a $u(F) \subset F$.
   (b) Montrer que u induit sur chaque sous-espace propre de v un endomorphisme diagonalisable.
   (c) En déduire l'existence d'une base commune de réduction dans E pour les endomorphismes u et v, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que celle ci soit une base de vecteurs propres à la fois de u et de v.
2. Plus généralement, on considère $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E.
   On suppose en outre que ces endomorphismes commutent deux à deux :
   $$(\forall\, (i,j) \in I^2), \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   Montrer l'existence d'une base commune de réduction dans E pour la famille $(u_i)_{i \in I}$ c'est-à-dire une base $\mathcal{B}$ de E qui est une base de vecteurs propres pour chaque endomorphisme u_i, $i \in I$.
   (*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E, en étudiant à part le cas où $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'homothéties.)
3. Montrer que l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est vraie dans l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbf{K})$, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout corps $\mathbf{K}$.
4. Étudier l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{R})$.
5. On étudie l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$.
   Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_2(\mathbf{C})$ satisfaisant à la propriété (b) de $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$.
   (a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où B est une matrice diagonale de $M_2(\mathbf{C})$ avec au moins une valeur propre nulle.
   (b) En supposant que B est une matrice diagonale non nulle avec une valeur propre nulle, démontrer l'existence d'un nombre complexe λ_0 tel que $A + \lambda_0 B$ ait une valeur propre double.
   (c) En déduire que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$ est vraie.
6. On suppose ici $\mathbf{K} = \mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où p est un nombre premier et n un nombre entier $\geqslant 1$.
   (a) Montrer que $A \in M_n(\mathbf{F}_p)$ est diagonalisable si et seulement si $A^p = A$.
   (b) Démontrer l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbf{F}_2)$.
   (c) Démontrer l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{F}_p)$, dans le cas $p \geqslant 3$.
   (*Indication* : on pourra suivre le même plan que dans le cas complexe rencontré à la question **I-A-5**)

I-B : Application de la réduction simultanée

1. (a) On suppose ici que $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.
   On considère un sous-groupe multiplicatif fini G de $GL_n(\mathbf{K})$ où n est un entier $\geqslant 1$.
   On suppose que :
   $$(\forall\, M \in G), \quad M^2 = I_n.$$
   Montrer que G est abélien de cardinal inférieur ou égal à 2^n.
   (b) En déduire que pour tout $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ les groupes multiplicatifs $GL_n(\mathbf{K})$ et $GL_m(\mathbf{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

2. Dans cette question, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et n est un nombre entier $\geqslant 1$.
   On considère A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{C})$ et on introduit l'endomorphisme de $M_n(\mathbf{C})$
   $$\Phi_{A,B} : M \mapsto AM + MB.$$
   (a) En supposant que A est diagonalisable et que $B = 0$, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
   (b) En supposant A et B diagonalisables, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
   (c) Démontrer la réciproque, c'est-à-dire que si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, A et B le sont.
   (*Indication* : On pourra utiliser la décomposition de Jordan-Dunford de A et B)
   (d) Lorsque A et B sont diagonalisables, déterminer les éléments propres de $\Phi_{A,B}$ en fonction de ceux de A et de ${}^tB$.
3. Dans cette question, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et on note $S_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $M_2(\mathbf{R})$. Soit V un hyperplan vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$ constitué de matrices diagonalisables sur $\mathbf{R}$.
   On se propose de montrer que V est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$.
   (a) Montrer que V contient la matrice I_2.
   (b) Montrer que V est conjugué au sous-espace vectoriel engendré par (I_2, A, B) avec
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   où ω est un nombre réel non nul.
   (c) En déduire le résultat.
4. Montrer que tout espace vectoriel formé de matrices diagonalisables de $M_2(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-espace vectoriel de $S_2(\mathbf{R})$.

Partie II : Le cas $n = 3$

On suppose que $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique nulle. On **rappelle** les définitions suivantes :
- Pour les polynômes de $\mathbf{K}[X]$

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

où m et n sont deux entiers $\geqslant 1$, on définit le **résultant** de P et Q par le déterminant de taille $m + n$.

$$R(P,Q) = \left|\begin{array}{cccccccc}
a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\
a_{m-1} & \ddots & \ddots & \vdots & b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & a_m & \vdots & & \ddots & b_n \\
\vdots & & & a_{m-1} & \vdots & & & b_{n-1} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_0 & & & \vdots & b_0 & & & \vdots \\
0 & a_0 & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0
\end{array}\right|$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n \text{ colonnes}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m \text{ colonnes}}$$

- Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ de coefficient dominant a_n, on définit le **discriminant** de P par

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} R(P, P').$$

1. On considère α, β et γ trois scalaires de $\mathbf{K}$. Montrer que le discriminant du polynôme

$$P = -X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$

est

$$-27\,\gamma^2 - 18\,\gamma\,\alpha\,\beta + \alpha^2\beta^2 - 4\,\alpha^3\gamma + 4\,\beta^3.$$

2. On pose dans $M_3(\mathbf{K})$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On suppose s distinct de 0 et 1. Montrer que le discriminant du polynôme caractéristique de $M + \lambda N$ est un polynôme de degré six en λ dont le coefficient dominant est $(s(1-s))^2$.

3. On pose dans $M_3(\mathbf{K})$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note

$$P_B = -X^3 + aX^2 + bX + c.$$

(a) Montrer que si $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$, on a :

$$(\forall \lambda \in \mathbf{K}), \quad P_{B+\lambda Q} = -X^3 + (a+\lambda)\,X^2 + (b - (b_1 + b_5)\,\lambda)\,X + c.$$

(b) Montrer alors que si en plus $b_1 + b_5 \neq 0$, le discriminant de $P_{B+\lambda Q}$ est un polynôme de degré quatre en λ et déterminer son coefficient dominant.

4. Ici $\mathbf{K} = \mathbf{C}$; on se propose de démontrer l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ de l'affirmation $\mathbf{MT}(3, \mathbf{C})$.
Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_3(\mathbf{C})$ satisfaisant à la propriété (b) de $\mathbf{MT}(3, \mathbf{C})$; on note $\mathscr{F}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré dans $M_3(\mathbf{C})$ par I_3, A et B.

(a) Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de matrices diagonalisables de $M_3(\mathbf{C})$ et que si la dimension de $\mathscr{F}$ est strictement inférieure à 3, les matrices A et B commutent.

(b) On suppose que la dimension de $\mathscr{F}$ est égale à 3. Montrer que l'on peut se ramener par conjugaison au cas où $A = \mathrm{Diag}(0, 0, 1)$ et B est un projecteur de rang 1.

(c) En déduire que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ de l'affirmation $\mathbf{MT}(3, \mathbf{C})$ est vraie.

Partie III : Le cas général dans C

III-A : Bases holomorphes

1. Soit Ω_0 un disque ouvert de $\mathbf{C}$ contenant l'origine ; on considère une application holomorphe M de Ω_0 dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire telle que chaque coefficient m_{ij} de M définisse une fonction holomorphe de Ω_0 dans $\mathbf{C}$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Pour tout $z \in \Omega_0\backslash\{0\}$, on note $V(z)$ le noyau de la matrice $M(z)$.
Démontrer l'existence d'un réel $\rho > 0$ et d'un entier $m \geqslant 0$ tels que
$$(\forall\, z \in \Omega_0), \quad (0 < |z| < \rho) \Longrightarrow (\dim V(z) = m).$$
(*Indication* : on pourra considérer les mineurs de $M(z)$.)
On suppose $m \geqslant 1$ dans la suite.
2. Sous les hypothèses ci-dessus et avec les mêmes notations, démontrer l'existence d'un nombre réel $r > 0$ et de m fonctions $\psi_1, \cdots, \psi_m$, holomorphes sur $D_r = \{z \in \Omega_0\ ; |z| < r\}$, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$, telles que pour tout $z \in D_r\backslash\{0\}$, les vecteurs $\psi_1(z), \cdots, \psi_m(z)$ engendrent $V(z)$ et $\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0)$ sont tous non nuls.
(*Indication* : on pourra commencer par trouver des vecteurs $\tilde{\psi}_1(z), \cdots, \tilde{\psi}_m(z)$ méromorphes en z, qui engendrent $V(z)$.)
3. Toujours avec les mêmes notations, notons Z^* l'ensemble des couples $(z, \psi) \in \Omega_0 \times \mathbf{C}^n$ tels que $z \neq 0$ et $\psi \in V(z)$, Z l'adhérence de Z^* dans $\Omega_0 \times \mathbf{C}^n$ et $V(0)$ (qui n'a pas encore été défini) le sous-ensemble de $\mathbf{C}^n$ tel que
$$\{0\} \times V(0) = Z \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^n).$$
   (a) On suppose que la famille $(\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0))$ est libre. Démontrer que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m.
   (b) Montrer qu'il existe une famille $(\psi_1, \cdots, \psi_m)$, comme à la question **III-A-2** telle que la famille $(\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0))$ soit libre et en déduire que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m.
   (*Indication* : partant d'une famille quelconque $(\phi_1, \cdots, \phi_m)$ vérifiant **III-A-2**, on pourra construire des familles $(\psi_1, \cdots, \psi_k, \phi_{k+1}, \cdots, \phi_m)$ par récurrence sur k.)
4. On considère une application holomorphe N d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ dans $M_n(\mathbf{C})$, un point μ_0 de $\mathbf{C}$ et un cercle Γ centré en μ_0, orienté dans le sens direct.
On suppose que pour tout $\lambda \in U$, la matrice $N(\lambda)$ est diagonalisable, que :
$$(\forall\, \lambda \in U), (\forall\, \mu \in \Gamma), \quad N(\lambda) - \mu I_n \in GL_n(\mathbf{C}),$$
et on note $R(\lambda, \mu) = (N(\lambda) - \mu I_n)^{-1}$.
   (a) Démontrer que la formule suivante
$$\Pi(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_\Gamma R(\lambda, \mu)\, d\mu$$
   définit une application holomorphe Π de U dans $M_n(\mathbf{C})$.
   (b) Soit λ_0 un point de U ; on suppose que μ_0 est l'unique valeur propre de $N(\lambda_0)$ entourée par le cercle Γ. Démontrer que $\Pi(\lambda_0)$ est la projection sur $E_{\mu_0}(N(\lambda_0))$, le sous-espace propre de $N(\lambda_0)$ associé à μ_0, parallèlement à la somme des autres sous espaces propres de $N(\lambda_0)$.
5. Démontrer que pour tout $\lambda \in U$, la matrice $\Pi(\lambda)$ est un projecteur, somme de projecteurs sur des sous-espaces propres de $N(\lambda)$ associés à des valeurs propres entourées par Γ.

Partie III-B : Courbes spectrales

Dans cette partie le corps de base est $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ désigne le disque ouvert unité $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}\,;|z| < 1\}$.
Soit A et B deux matrices dans $M_n(\mathbf{C})$, pour $n \in \mathbf{N}^*$; on pose :

$$(\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^2), \quad P(\lambda,\mu) = P_{A+\lambda B}(\mu) = \det(A + \lambda B - \mu I_n).$$

Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, le polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ sera noté P_λ.
On définit l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^2\,; P(\lambda,\mu) = 0\}.$$

On appelle **multiplicité** (dans $\mathcal{C}$) d'un point $x = (\lambda,\mu)$ de $\mathcal{C}$, la multiplicité de la racine μ du polynôme P_λ, notée $d(x)$.
Nous **admettrons** le théorème suivant qui permet de paramétrer localement l'ensemble $\mathcal{C}$ par des injections holomorphes de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}^2$:

Quelque soit $x_0 = (\lambda_0,\mu_0) \in \mathcal{C}$, il existe $l \in \mathbf{N}^*$ et deux familles finies d'applications holomorphes de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}$; $(f_\alpha)_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$ et $(g_\alpha)_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$, qui vérifient les conditions suivantes :

(i) $(\forall\,\alpha \in [\![1,l]\!]), \quad f_\alpha(0) = \lambda_0 \text{ et } g_\alpha(0) = \mu_0$

(ii) $(\forall\,z \in \mathbf{D}), (\forall\,\alpha \in [\![1,l]\!]), \quad (f_\alpha(z), g_\alpha(z)) \in \mathcal{C}$

(iii) $(\exists \eta > 0), (\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathcal{C}),$
$(|\lambda - \lambda_0| \leqslant \eta, |\mu - \mu_0| \leqslant \eta) \Longrightarrow \Big((\exists \alpha \in [\![1,l]\!]), (\exists z \in \mathbf{D}), \quad \lambda = f_\alpha(z) \text{ et } \mu = g_\alpha(z)\Big)$

(iv) $(\forall\,\alpha \in [\![1,l]\!]), (\forall\,(z,w) \in \mathbf{D}^2), \quad (f_\alpha(z) = f_\alpha(w), g_\alpha(z) = g_\alpha(w)) \Longrightarrow (z = w)$

(v) $(\forall\,(\alpha,\beta) \in [\![1,l]\!]^2), (\alpha \neq \beta), (\forall\,(z,w) \in (\mathbf{D}\backslash\{0\})^2), \quad (f_\alpha(z), g_\alpha(z)) \neq (f_\beta(w), g_\beta(w))$

(vi) $(\forall\,z \in \mathbf{D}\backslash\{0\}), (\forall\,\alpha \in [\![1,l]\!]), \quad f'_\alpha(z) \neq 0.$

Nous noterons $F_\alpha = (f_\alpha, g_\alpha)$ les applications associées de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}^2$, pour tout $\alpha \in [\![1,l]\!]$.

Remarque : la condition (ii) signifie que $F_\alpha(\mathbf{D}) \subset \mathcal{C}$, (iii) que l'ensemble $\bigcup\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant l} F_\alpha(\mathbf{D})$ contient un voisinage de x_0 dans $\mathcal{C}$, (iv) que chaque F_α est injective et (v) que $(F_\alpha(\mathbf{D}\backslash\{0\}))_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints. La condition (vi) est particulière à notre situation où chaque polynôme P_λ est de degré n en μ, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Pour $\alpha \in [\![1,l]\!]$, l'ensemble $F_\alpha(\mathbf{D})$ s'appelle une **branche locale** de $\mathcal{C}$ en x_0.
Nous **admettrons** que la multiplicité dans $\mathcal{C}$ est constante dans une branche épointée, c'est-à-dire que $d(x)$ ne dépend pas de x si $x \neq x_0$ et $x \in F_\alpha(\mathbf{D})$; on la notera d_α, pour tout $\alpha \in [\![1,l]\!]$.
On appellera **ramification** e_α d'une branche $F_\alpha(\mathbf{D})$ en x_0 l'ordre du zéro 0 de $f_\alpha - \lambda_0$, qui existe puisque f_α est non constante ; nous **admettrons** alors que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{\lambda_0\}$ suffisamment proche de λ_0, le nombre de points $x = (\lambda,\mu) \in F_\alpha(\mathbf{D})$ est exactement e_α, pour tout $\alpha \in [\![1,l]\!]$.
Enfin, nous **supposerons** que pour $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ fixé, si μ_0 et μ'_0 sont deux racines distinctes de P_{λ_0}, les branches locales de $\mathcal{C}$ en $x_0 = (\lambda_0,\mu_0)$ sont disjointes des branches locales de $\mathcal{C}$ en $x'_0 = (\lambda_0,\mu'_0)$.

1. Soit $\big(F_\alpha(\mathbf{D})\big)_{\alpha\in[\![1,l]\!]}$ la famille de branches locales de $\mathcal{C}$ en un point $x_0 = (\lambda_0,\mu_0)$ de $\mathcal{C}$.
Démontrer que la multiplicité de x_0 dans $\mathcal{C}$ vérifie
$$d(x_0) = \sum_{\alpha=1}^{l} e_\alpha d_\alpha.$$

2. On suppose jusqu'à la fin du problème que $A + \lambda B$ est diagonalisable, pour λ dans $\mathbf{C}$.
Soit $(F_\alpha(\mathbf{D}))_{\alpha\in[\![1,l]\!]}$ la famille de branches locales de $\mathcal{C}$ en $x_0 = (\lambda_0,\mu_0)$ et z un point de $\mathbf{D}\backslash\{0\}$.
On définit l'espace vectoriel, pour $\alpha \in [\![1,l]\!]$
$$V_\alpha(z) = \{\psi \in \mathbf{C}^n\,; (A + f_\alpha(z)B)\psi = g_\alpha(z)\psi\},$$

et l'espace vectoriel associé $V_\alpha(0)$ comme en **III-A-3**.
Nous **admettons** la relation suivante :

$$E_{\mu_0}(A+\lambda_0 B) = \sum_{\alpha=1}^{l} V_\alpha(0).$$

Montrer alors que la ramification e_α de $F_\alpha(\mathbf{D})$ est égale à 1, pour tout $\alpha \in [\![1,l]\!]$.

3. (a) Établir l'existence de n fonctions entières $\mu_i : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $\mathcal{C}$ coïncide avec la réunion des graphes de $\mu_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.
   (b) Démontrer l'existence de nombres complexes $a_i, b_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, tels que

$$(\forall\, i \in [\![1,n]\!]), (\forall\, \lambda \in \mathbf{C}), \quad \mu_i(\lambda) = a_i + \lambda b_i.$$

4. Notation : pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, $\Gamma_i(\lambda, r)$ désigne le cercle de centre $\mu_i(\lambda)$ et de rayon r.
   (a) Démontrer l'existence de réels $\rho > 0$ et $\Lambda > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $r > 0$

$$(0 < r < \rho) \text{ et } (|\lambda| > \Lambda) \Longrightarrow \ (\forall\, i \in [\![1,n]\!]), (\forall\, \mu \in \Gamma_i(\lambda, r)),\ A + \lambda B - \mu I_n \text{ inversible.}$$

   (b) On note $R(\lambda,\mu)$ l'inverse de $A + \lambda B - \mu I_n$ lorsqu'il existe et on fixe $0 < r < \rho$.
   Démontrer que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la formule

$$\Pi_{j,r}(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_j(\lambda,r)} R(\lambda,\mu)\, d\mu.$$

   définit une fonction holomorphe de l'ouvert $U_\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\, |\lambda| > \Lambda\}$ dans $M_n(\mathbf{C})$.
   (c) Démontrer que, si en plus B est diagonalisable, chaque $\Pi_{j,r}(\lambda)$ admet une limite dans $M_n(\mathbf{C})$ lorsque $|\lambda|$ tend vers l'infini, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.
5. On considère A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$. On suppose que $A + \lambda B$ est diagonalisable, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Démontrer que A et B commutent.

IMPRIMERIE NATIONALE – 9 629 – D'après documents fournis