Le théorème de Stampacchia

Mars 2005

1 Rappels sur les espaces de Hilbert

On considère ici un espace de Hilbert H muni de son produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, celui-ci induit une topologie normée complète. Voici quelques exemples de tels espaces :

1. les espaces vectoriels de dimension finie,
2. l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des fonctions de carré intégrable sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$,
3. les espaces de Sobolev $H^p(\Omega)$.

On peut d'ailleurs montrer que tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isométriquement isomorphe à $L^2(\mathbb{R})$.

Sur un espace de Hilbert, on dispose d'un opérateur de projection orthogonale sur des sous-ensembles bien choisis. Plus précisément :

Théorème 1 *Si $K \subset H$ est un convexe non vide et fermé alors pour tout élément $f \in H$ il existe un unique $u \in H$ vérifiant*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|.$$

u est le projeté de f sur K et sera noté $P_K(f)$. On a l'équivalence

$$u = P_K(f) \iff \begin{cases} u \in K \\ (f - u, f - v) \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}. \tag{1}$$

Signalons également que l'opérateur P_K est lipschitzien de rapport 1, c'est-à-dire qu'on a

$$\forall f_1, f_2 \in H, \quad \|P_K(f_1) - P_K(f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Voici une bonne description du dual topologique H' de H.

Théorème 2 (Riesz-Fréchet) *Pour toute forme linéaire continue $\varphi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, \quad \varphi(v) = (f, v).$$

Et de plus

$$\|f\| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Un espace de Hilbert est donc isométriquement isomorphe à son dual topologique et est par conséquent un espace reflexif.

2 Le théorème de Stampacchia

Définition 3 *On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est coersive si*

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in H, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Voici maintenant le résultat principal de cet article.

Théorème 4 (Stampacchia) *Considérons $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coersive ; soit K un convexe non vide fermé de H. Pour toute $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique vérifiant*

$$a(u, v - u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in K. \tag{2}$$

Si de plus a est symétrique alors u est caractérisé par

$$u \in K \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2} a(u, v) - \varphi(v) \right).$$

DEMONSTRATION : On représente tout d'abord la forme linéaire φ comme un produit scalaire grâce au théorème de Riesz-Fréchet 2 :

$$\exists! f \in H, \quad \varphi(v) = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

Pour chaque $u \in H$ fixé, l'application $v \longmapsto a(u, v)$ est un élément de H' et donc encore par 2, il existe un unique élément noté $A(u) \in H$ tel que

$$a(u, v) = (A(u), v), \quad \forall v \in H.$$

Ainsi définit, l'opérateur A est linéaire ; en effet, les égalités $a(u_1, v) = (A(u_1), v)$ et $a(u_2, v) = (A(u_2), v)$ entraînent $a(u_1+\lambda u_2, v) = (A(u_1)+\lambda A(u_2), v)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et l'unicité de la représentation permet de conclure.

Par coersivité de la forme a, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) = (A(u), u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H. \tag{3}$$

D'autre part, a étant supposée continue, il vient pour tout $u \in H$,

$$\|u\|^2 = a(u, A(u)) =\leq c\|u\|.\|A(u)\|^2$$

où $c = \sup\limits_{\|u\|\leq 1, \|v\|\leq 1} |a(u, v)|$ est la norme de a. L'inégalité 3 implique évidemment

$$\|A(u)\| \leq c\|u\|.$$

L'inégalité 2 à prouver est équivalente à

$$(f - A(u), v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

et si ρ désigne un réel > 0, alors cela équivaut encore à

$$(\rho f - \rho A(u) + u - u, v - u) \leq 0,$$

ou encore

$$u = P_K(\rho f - \rho A(u) + u)$$

d'après la relation 1 du théorème 1. Il s'agit donc d'étudier les points fixes de l'application $S : K \to K, S(v) = P_K(\rho f - \rho A(v) + v)$. Soit $v_1, v_2 \in K$. P_K étant lipschitzien, on a

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq \|\rho A(v_1) - \rho A(v_2) - (v_1 - v_2)\|$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|S(v_1) - S(v_2)\| &\leq \rho^2\|A(v_1 - v_2)\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 - 2(\rho A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) \\
&\leq (1 + c^2\rho^2 - 2\alpha\rho)\|v_1 - v_2\|^2 \\
&= k^2\|v_1 - v_2\|^2.
\end{aligned}$$

Choisissons ρ de sorte que $k^2 = 1 + c^2\rho^2 - 2\alpha\rho < 1$ (prendre $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{C^2}$). On en déduit que S est contractante sur le sous-espace complet (car fermé) K, le théorème de point fixe de Picard donne alors l'existence et l'unicité de u.

Supposons maintenant a symétrique. Alors c'est un produit scalaire qui muni H d'une structure d'espace de Hilbert A nouveau grâce au thérorème de représentation de Riesz 2, on sait qu'il existe un unique $g \in H$ tel que

$$\varphi(v) = a(g, v) \quad \forall v \in H.$$

La relation 2 s'écrit alors

$$a(g-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

et par conséquent $u = P_k(g)$, projection dans (H, a). La première assertion du théorème 1 donne alors

$$a(g-u, g-u)^{\frac{1}{2}} = \min_{v \in K} a(g-v, g-v)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$a(g,g) - 2a(g,u) + a(u,u) = \min_{v \in K}(a(g,g) - 2a(g,v) + a(v,v)),$$

c'est-à-dire encore

$$u \in K \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}\Big(\frac{1}{2}a(u,v) - \varphi(v)\Big).\square$$

Comme application de ce théorème, on peut d'abord penser au théorème de Lax-Milgram, mais celui-ci peut se prouver simplement par des méthodes plus élémentaires.

Le théorème de Stampacchia se révèle être un outil efficace pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles elliptiques. Il donne en effet existence et unicité des solutions faibles. Il s'applique par exemple au problème de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f \text{ sur } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}.$$