Sous groupes compacts de GL(E)

Gabriel Peyré

Théorème 0.1. L'ENONCE À DÉMONTRER *E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit G un sous groupe compact de $GL(E)$. Alors il existe un produit scalaire $\langle.|.\rangle_G$ sur E, de forme quadratique q_G tel que $G \subset O(q_G)$.*

- *Si on suppose G fini, la réponse est évidente, il suffit de considérer* :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle g(x), g(y)\rangle$$

- *Construction d'un point fixe pour $v \in G$* : Si on suppose que l'on dispose d'un compact convexe non vide $K \subset E$ tel que pour un $v \in G$ fixé, on ait $v(K) \subset K$, on va construire un point fixe pour v. En effet, on prend $x_0 \in K$ et un considère la suite :

$$x_k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} v^i(x_0)$$

- *Construction d'une norme strictement convexe stable par G* : On définit :

$$\forall x \in E,\ N^G(x) = \max_{g\in G}\|g(x)\| \tag{1}$$

- *Construction d'un point fixe pour G* : Cette fois ci, on suppose que l'on dispose d'un compact K stable par tous les éléments de G. Pour $u \in G$, on note $F_u = \{x \in E,\ u(x) = x\}$. Comme K est compact et les F_u fermé, Il suffit donc de montrer que pour toute famille finie $\{F_{u_k}\}_{k=1}^{p}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} F_{u_k} \neq \emptyset$. Pour ce faire, on construit $v = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} u_k$, qui vérifie $v(K) \subset K$. Reste à montrer que le point fixe a de v est un point fixe commun des u_k, ce qui provient de la stricte convexité de la norme N^G.
- *Une opération linéaire de G sur $\mathcal{S}_n$* : On note $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques, et $\mathcal{S}_n^{++}$ le cône convexe des matrices symétriques définies positives. On note $*$ la loi symétrisée sur G, i.e. définie par $\forall (g_1, g_2) \in G^2,\ g_1 * g_2 = g_2 g_1$. On peut définir une action de $(G, *)$ sur $\mathcal{S}_n$ par via la formule $\forall g \in G,\ \forall S \in \mathcal{S}_n,\ gS = {}^t gSg$, ce qui correspond à la donnée du morphisme :

$$\begin{aligned}\rho :\ (G, *) &\to GL(\mathcal{S}_n)\\ g &\mapsto \rho(g) \quad \text{avec } \rho(g)(S) = {}^t gSg\end{aligned}$$

  On vérifie que ceci définit bien une action, ie $\rho(g_1 * g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ et $\rho(Id) = Id$. De plus, cette action est linéaire.
- *Construction de $\langle.|.\rangle_G$* : On note $\mathcal{G} = \rho(G) \subset GL(\mathcal{S}_n)$, qui est compact comme image continue de G compact par ρ continue (car polynomiale). Soit alors $\mathcal{S} = \{{}^t gg,\ g \in G\}$, compact comme image de G par $g \to {}^t gg$ continue car polynomiale, et est inclus dans $\mathcal{S}_n^{++}$, par construction (les éléments de G sont inversibles). On note K l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$, qui est à son tour compacte, d'après le théorème de *Carathéodory*, et incluse dans $\mathcal{S}_n^{++}$ qui est convexe. On remarque que, comme l'action de G est linéaire, comme $\mathcal{S}$ est stable par l'action de G, K l'est aussi, ce qui veut dire que K est stable par $\mathcal{G}$, qui est un sous groupe de $GL(\mathcal{S}_n)$. D'après l'étude menée aux paragraphes précédents, on peut donc trouver un élément $S \in K \subset \mathcal{S}_n^{++}$ fixe par tous les éléments de $\mathcal{G}$, ce qui signifie $\forall g \in G,\ \rho(g)(S) = {}^t gSg = S$ i.e. $G \subset O(q_S)$, où q_S est le produit scalaire euclidien défini par S.

Référence : [**?**, p.141]
Utilisation : (***,4) (**,1) (*,0)
Mots clefs : compacité, point fixe, convexité, actions de groupe.

106	Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.	***
125	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.	***
129	Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.	***
144	Utilisation des groupes en géométrie.	***
101	Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.	**