Représentation linéaire des groupes finis

Gabriel Peyré

Définition 0.1. Représentation linéaire Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une *représentation linéaire* d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une *action de groupe linéaire* de G sur V, en notant $\forall (g, v) \in G \times V,\ g.v = \rho(g)(v)$. On dit aussi que V est un G-module.

Exemple 0.2. Voici les exemples fondamentaux de représentations linéaires :

- La représentation triviale, définie par $\forall s \in G,\ \rho(s) = Id_V$.
- La représentation régulière : on se donne un espace vectoriel de dimension $|G|$ et on considère une base que l'on indice par les éléments de G, i.e. $\mathcal{B} = \{e_h\}_{h\in G}$. Pour $s \in G$, on définit alors $\rho(s) \in GL(V)$ par $\rho(s)(e_h) = e_{sh}$, ce qui correspond à une permutation des coordonnées.
- La représentation somme : pour deux représentations ρ^1 et ρ^2 respectivement sur V et W, on définit une représentation $\rho^1 \oplus \rho^2$ sur $V \oplus W$ par la formule :
$$\forall (v, w) \in V \times W,\ \rho^1 \oplus \rho^2(g)(v + w) = \rho^1(v) + \rho^2(w)$$
- La représentation produit : pour deux représentations ρ^1 et ρ^2 respectivement sur V et W, on définit une représentation $\rho^1 \otimes \rho^2$ notée aussi $\rho_{V\otimes W}$ sur $\mathcal{L}(V, W)$ (espace des applications linéaires de V dans W) par la formule :
$$\forall f \in \mathcal{L}(V, W),\ \rho_{V\otimes W}(g)(f) = \rho^2(g) \circ f \circ \rho^1(g^{-1})$$
- Une action sur les polynômes : si G est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$, on définit une action linéaire de G sur $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ en notant, pour $A = (a_{i,j}) \in G$, $\rho(A)(P)$ le polynôme obtenu par la substitution de X_i par $\sum_{j=1}^n a_{i,j} X_j$. On note symboliquement $\rho(A)(P)(X) = P(A.X)$.

Définition 0.3. Représentations isomorphes Deux représentations ρ et ρ' d'un même groupe G respectivement sur V et V' sont dite *isomorphes* si il existe un isomorphisme $\tau : V \to V'$ tel que $\forall s \in G,\ \tau\rho(s) = \rho'(s)\tau$, ce qui permet d'identifier les deux représentations.

Définition 0.4. Sous représentations Si une représentation ρ de G sur V admet un sous espace vectoriel $W \subset V$ stable par tous les $\rho(s) \in GL(V)$, elle induit une sous représentation ρ^W sur W.

Définition 0.5. Représentations irréductibles Une représentation est dite *irréductible* si elle n'admet pas de sous représentation stricte.

Proposition 0.1. Représentation unitaire *Toute représentation est isomorphe à une représentation unitaire.*

Démonstration. On peut supposer V muni d'un produit hermitien $(.,.)$. Quitte à remplacer ce produit (x, y) par $\sum_{s\in G} (\rho(s)x, \rho(s)y)$, on peut supposer ce produit invariant par l'action de G. Donc dans une base orthonormale pour $(.,.)$, les matrices des $\rho(s)$ sont unitaires. □

Corollaire 0.2. *Une représentation ρ sur V est réductible si elle peut s'écrire comme somme $V = W \oplus W^0$ de deux représentations non triviales.*

Démonstration. Quitte à faire un changement de base, on peut supposer la représentation unitaire. Si la représentation n'est pas irréductible, elle admet un sous-espace globalement stable W, et en prenant un supplémentaire orthogonal W^0, ce dernier est aussi stable, car les matrices des $\rho(s)$ sont unitaires. □

Remarque. Le corollaire précédent signifie que les matrices des $\rho(s)$ sont diagonales par bloc dans une base bien choisie, ce qui correspond bien à la représentation somme.

Proposition 0.3. *Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.*

Remarque. Cette écriture n'est bien sûr pas unique, mais on va voir qu'elle est unique "à isomorphisme près", au sens que si $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, le nombre de fois qu'une représentation irréductible U est isomorphe à un W_i est fixé.

Définition 0.6. Sous-représentation invariante Soit ρ une représentation sur V. On note V^G le sous-espace des vecteurs *invariants* , i.e. $V^G = \{v \in V;\ \forall s \in G,\ \rho(s)(v) := s.v = v\}$. C'est une sous représentation de V.

Définition 0.7. Opérateurs d'entrelacement Dans le cas de la représentation produit $\rho_{V\otimes W}$ sur $\mathcal{L}(V, W)$ de deux représentations ρ^1 et ρ^2 respectivement sur V et W, on note $Hom_G(V, W) := \mathcal{L}(V, W)^G$ l'espace des invariants. On nomme ses éléments des *opérateurs d'entrelacement* ou des *G-morphismes* .

Remarque. Dire que $f \in \mathcal{L}(V, W)$ est un opérateur d'entrelacement correspond à ce que f vérifie $\forall s \in G,\ f\rho^1(s) = \rho^2(s)f$, ie f fait commuter, pour tout $s \in G$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_V(s)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_W(s)} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Si f est bijectif, ceci correspond au fait que f soit un isomorphisme de représentations, dans le cas général, on parle de G-morphismes, où d'opérateurs d'entrelacement.

Lemme 0.4. Lemme de Schur *Soient $\rho^1 : G \to GL(V)$ et $\rho^2 : G \to GL(W)$ deux représentations irréductibles d'un groupe G. Soit $f \in \mathcal{L}(V, W)$ un opérateur d'entrelacement, ie $f \in Hom_G(V, W)$. Alors :*

- *Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, $f = 0$.*
- *Sinon, on peut supposer $V = W$, $\rho^1 = \rho^2$, et alors f est une homothétie.*

Démonstration. Si on suppose que $f \neq 0$, alors les hypothèses montrent que $V_0 = Ker(f)$ est stable par tous les $\rho^1(s)$, et donc comme ρ^1 est irréductible, $V_0 = \{0\}$. De même $Im(f)$ est stable par tous les $\rho^2(s)$, donc au final, f est un isomorphisme et ρ^1 et ρ^2 sont isomorphes.
Dans le deuxième cas, comme on travail sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, f a au moins une valeur propre λ. En posant $f' = f - \lambda Id$, on voit que $Ker(f') \neq \{0\}$, et en appliquant la première partie de la démonstration, on a $f' = 0$. □

Corollaire 0.5. *On a donc : $dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(V, W)) = 1$.*

Définition 0.8. Opérateur de Reynolds Soit ρ une représentation de G sur V. On définit l'opérateur $R_G \in \mathcal{L}(V, V)$ par la formule :

$$R_G := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho(s) \qquad \in \mathcal{L}(V, V)$$

On l'appelle *opérateur de Reynolds* .

Théorème 0.6. Propriétés de l'opérateur de Reynolds *R_G est un projecteur sur V^G. En particulier :*
(i) $V^G = Im(R_G) = Ker(R_G - Id)$
(ii) $dim_{\mathbb{C}}(V^G) = tr(R_G)$

Définition 0.9. Application moyennée Dans le cas de la représentation produit $\rho_{V \otimes W}$ sur $\mathcal{L}(V, W)$ de deux représentations ρ^1 et ρ^2 respectivement sur V et W, pour $f \in \mathcal{L}(V, W)$, on node $\widehat{f} := R_G(f) \in \mathcal{L}(V, W)$, ce qui correspond à l'application moyennée :

$$\widehat{f} : v \in V \rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho^2(s)(f(\rho^1(s^{-1})(v)))$$

Proposition 0.7. Application aux G-morphismes *Dans le cas de la représentation produit $\rho_{V \otimes W}$ sur $\mathcal{L}(V, W)$ de deux représentations ρ^1 et ρ^2 respectivement sur V et W, pour $f \in \mathcal{L}(V, W)$, on a :*

$$dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(V, W)) = tr(R_G) = \varepsilon$$

Avec $\varepsilon = +1$ si les deux représentations sont isomorphes, et 0 sinon. De plus, pour tout $f \in \mathcal{L}(V, W)$, $\widehat{f}$ est une application $G-$invariante pour la représentation linéaire $\rho_{V \otimes W}$, ie c'est un G-morphisme, $f \in Hom_G(V, W)$.

Définition 0.10. Caractères Soit ρ une représentation d'un groupe G sur V de dimension n. On lui associe son *caractère* χ_ρ défini par $\chi_\rho(s) = tr(\rho(s))$ où tr désigne la trace.

Proposition 0.8. Propriétés des caractères *On a les propriétés suivantes :*
(i) $\chi_\rho(1) = n$
(ii) $\forall s \in G,\ \chi_\rho(s^{-1}) = \overline{\chi_\rho(s)}$.
(iii) $\forall (s, t) \in G^2,\ \chi_\rho(tst^{-1}) = \chi_\rho(s)$: on dit que χ_ρ est une fonction centrale sur G.
(iv) Si ρ se décompose en une somme directe de deux représentations ρ_V et ρ_W, alors

$$\chi_\rho := \chi_{V \oplus W} = \chi_{\rho_V} + \chi_{\rho_W}.$$

(v) Si on note $\rho_{V \otimes W}$ la représentation produit sur $\mathcal{L}(V, W)$ de deux représentations ρ_V et ρ_W, alors $\rho_{V \otimes W} = \overline{\chi_{\rho_V}} \chi_{\rho_W}$.

Démonstration. (i) C'est évident car $tr(Id_V) = dim(V) = n$.
(ii) Vient du fait que l'on peut prendre une matrice unitaire pour $\rho(s)$ et de :

$$\chi_\rho(s^{-1}) = tr(\rho(s)^{-1}) = tr(\overline{\rho(s)}) = \overline{tr(\rho(s))}.$$

(iii) Vient du fait que $\forall (A, B) \in GL_n(\mathbb{C}),\ tr(BAB^{-1}) = tr(A)$.
(iv) Si on note $\mathcal{B}_V$ une base de V et $\mathcal{B}_W$ une base de W, la matrice de $\rho_{V \oplus W}(s)$ s'écrit dans la base $\mathcal{B} := \mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W$:

$$M(s) = \begin{pmatrix} M_V(s) & 0 \\ 0 & M_W(s) \end{pmatrix}$$

où $M_V(s)$ est la matrice de ρ_V(s) dans la base $\mathcal{B}_V$ et $M_W(s)$ celle de $\rho_W(s)$ dans $\mathcal{B}_W$. D'où $\chi_{V \oplus W}(s) = tr(M(s)) = tr(M_V(s)) + tr(M_W(s)) = \chi_V(s) + \chi_W(s)$.

(v) Provient du lemme suivant.

□

Lemme 0.9. *Soit $u \in \mathcal{L}(W)$ et $v \in \mathcal{L}(V)$ deux applications linéaires. On définit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V), \mathcal{L}(W))$ par la formule $\Phi(f) = u \circ f \circ v$, alors on a $tr(\Phi) = tr(u)tr(v)$.*

Démonstration. On se donne des bases $(e_i)_{i\in I}$ de V et $(f_j)_{j\in J}$ de W, ainsi que les bases duales $(e_i)^*_{i\in I}$ et $(f^*_j)_{j\in J}$. On peut construire une base $(F_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de $\mathcal{L}(V,W)$ par la formule :

$$\forall x \in V,\ F_{i,j}(x) := \langle e^*_i, x\rangle f_j \in W$$

La base duale est ainsi définie par la propriété :

$$\forall f \in \mathcal{L}(V,W),\ \langle F^*_{i,j}, f\rangle = \langle f^*_j, f(e_i)\rangle$$

On a donc :

$$\begin{array}{ll} tr(\Phi) := & \sum_{(i,j)\in I\times J} \langle F^*_{i,j}, \Phi(F_{i,j})\rangle = \sum_{(i,j)\in I\times J} \langle f^*_j, u \circ F_{i,j}(v(e_i))\rangle \\ = & \sum_{(i,j)\in I\times J} \langle f^*_j, u(\langle e^*_i, v(e_i)\rangle f_j)\rangle = \sum_{(i,j)\in I\times J} \langle f^*_j, u(f_j)\rangle \langle e^*_i, v(e_i)\rangle = tr(u)tr(v) \end{array}$$

□

Définition 0.11. Produits hermitiens Si φ et ψ sont deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$(\varphi, \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{t\in G} \varphi(t)\overline{\psi(t)}$$

$(.,.)$ est un *produit hermitien* sur l'espace vectoriel E des fonctions de G dans $\mathbb{C}$.

Théorème 0.10. Relations d'orthogonalité *Une famille de caractères de représentations irréductibles non deux à deux isomorphes forme une famille orthonormale de l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$, ce qui signifie :*

- *Si χ est le caractère d'une représentation irréductible, on a $(\chi, \chi) = 1$.*
- *Si χ et χ' sont deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, on a $(\chi, \chi') = 0$.*

Démonstration. Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations de la famille considérée, respectivement sur des espaces vectoriels V et W. Avec la proposition 0.7, on a donc : $tr(R_G) = \varepsilon$, où $\varepsilon = +1$ si les deux représentations sont isomorphes (donc en fait égales), et 0 sinon. Or :

$$tr(R_G) = \frac{1}{G} \sum_{s\in G} tr(\rho_{V\otimes W})(s) = \frac{1}{G} \sum_{s\in G} \chi_{\rho_{V\otimes W}}(s)$$

Or on a vu à que $\chi_{V\otimes W}(s) = \overline{\chi_V(s)}\chi_W(s)$, donc on a bien :

$$tr(R_G) = \frac{1}{G} \sum_{s\in G} \overline{\chi_V(s)}\chi_W(s) := (\chi_W, \chi_V) = \varepsilon$$

□

Proposition 0.11. Unicité de la décomposition *On suppose qu'une représentation ρ de G sur V est décomposée en somme de représentations irréductibles $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$. Alors si W est une représentation irréductible de caractère χ_W, le nombre de fois que W intervient dans la décomposition (ie le nombre de W_i isomorphes à W) est indépendant de la décomposition et vaut (χ_ρ, χ_W). Au final, si on choisit une famille $(U_1, \ldots, U_r)$ de représentations deux à deux non isomorphes, on écrit de manière unique $V = n_1W_1 \oplus \ldots \oplus n_rW_r$ avec $n_i = (\chi_\rho, \chi_{W_i})$.*

Corollaire 0.12. *Deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractères. De plus, une représentation sur V de caractère χ_V est irréductible si et seulement si $(\chi_V, \chi_V) = \sum n_i^2 = 1$.*

Remarque. En fait, on peut montrer que famille des χ_{W_i} forme une base orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions centrale. Le nombre de W_i est donc égal aux nombre de classes de conjugaisons dans G.

Référence : [**?**, p.1][**?**, p.267]
Utilisation : (***,14) (**,2) (*,0)
Mots clefs : action de groupe, groupes finis, caractères, matrices semblables, sous-espaces stables, dimension, produit hermitien, espace hermitien, sous groupes finis de $SO(3)$.

100	Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement. Séries génératrices.	***
101	Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.	***
103	Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.	***
104	Groupes finis. Exemples et applications.	***
105	Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.	***
106	Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.	***
107	Sous-groupes finis de $O(2,\mathbb{R})$, de $O(3,\mathbb{R})$. Applications.	***
118	Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.	***
119	Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.	***
122	Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.	***
123	Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.	***
126	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.	***
136	Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie. Espace dual, orthogonalité. Applications.	***
138	Endomorphismes diagonalisables.	***
105	Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.	**
144	Utilisation des groupes en géométrie.	**