Quadriques et classes de similitudes

Gabriel Peyré

Définition 0.1. Les formes quadratiques étudiées On identifie $\mathbb{R}^4$ à $E = M(2,\mathbb{R})$. Le déterminant définit sur E une forme quadratique $q(A) = ad - bc$, où l'on a noté $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. C'est une forme quadratique non dégénérée de signature $(2,2)$. L'autre forme quadratique est définie par $l(A) = tr(A^2) = a^2 + d^2 + 2bc$. C'est une forme quadratique non dégénérée de signature $(3,1)$. Un autre cône important est celui des matrices impotentes, noté C_{nilp}. On notera $C^*_{nilp} = C_{nilp} - \{0\}$.

Proposition 0.1. Etude de $C(q)$ *Le cône isotrope pointé $C(q) - \{0\}$ de q est composé des matrices de rang 1. Un représentant de chaque classe peut être donné par $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou par λP où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, suivant que la trace λ est nulle ou pas. La matrice N correspond à la classe de similitude C^*_{nilp}.*
L'équation de l'hyperplan tangent à $C(q)$ en un point A est $\{X \in E, \quad tr(AX) = tr(A)tr(X)\}$. Cet hyperplan coupe $C(q)$ suivant deux plans $P_1(A)$ et $P_2(A)$. Ces deux plans se rencontrent suivant la génératrice de $C(q)$ issue de A.

Proposition 0.2. Etude de P_1 et P_2 *Pour $X \in C(q)$, $P_1(X)$ est constitué des matrices ayant même noyau que X, et $P_2(X)$ des matrices ayant même image que X.*

Définition 0.2. Hyperplans affines On note $H_0 = \{A \in E, \quad tr(A) = 0\}$, qui est un hyperplan vectoriel de E. On note H_s l'hyperplan des matrices symétriques.
Les hyperplans affines correspondants à H_0 sont les $H_a = \{A \in E, \quad tr(A) = a\}$.

Proposition 0.3. Etude de $C(l)$ *Pour $A \in C(l)$, l'hyperplan tangent en A à $C(l)$ est*

$$\tau^l_A = H(A) = \{X \in E, \quad tr(AX) = 0\}.$$

Proposition 0.4. Cones et hyperplans *Sur H_0, on a $l = -2q$ et $C(q) \cap H_0 = C(l) \cap H_0 = C_{nilp}$.*
De même, $C(q) \cap H_s$ est un vrai cône de $\mathbb{R}^3$. Par contre, on a $C(l) \cap H_s = \{0\}$.
Enfin, on a aussi $C(q) \cap C(l) = C_{nilp}$.

Proposition 0.5. Obtention des hyperboloïdes
- *Pour $a \in \mathbb{R}$, $H_a \cap C(q)$ est un hyperboloïde à une nappe.*
- *Pour $a \in \mathbb{R}$, $H_a \cap C(l)$ est un hyperboloïde à deux nappes.*

Proposition 0.6. Etude de certains polynômes *Pour $A \in E$ on pose :*

$$\Pi_1(X) = det(A - XI_2) \text{ et } \Pi_2(X) = tr((A - XI_2)^2)$$

Les racines (λ_1, λ_2) de Π_1 et (μ_1, μ_2) de Π_2 forment un carré, les diagonales joignant les racines du même polynôme. En particulier :
- *Les racines de Π_1 sont réelles si et seulement si celles de Π_2 sont complexes conjuguées.*

- *Les racines de Π_2 sont réelles si et seulement si celles de Π_1 sont complexes conjuguées.*

Théorème 0.7. Etude des classes de similitude *Soit $A \in E$ une matrice de valeurs propres α et β.*

- *Si les valeurs propres sont réelles et distinctes, la classe de similitude de A est une hyperboloïde à une nappe.*
- *Si les valeurs propres sont complexes conjuguées et distinctes, la classe de similitude de A est une hyperboloïde à deux nappes.*
- *Si les deux valeurs sont égales et la matrice non scalaire, la classe de similitude est un vrai cône de R^3 privé de son sommet.*
- *Si la matrice est scalaire, la classe de similitude est un point.*

Référence : [**?**, p.217]
Utilisation : (***,2) (**,2) (*,0)
Mots clefs : matrices semblables, quadriques, cônes, matrices nilpotentes.

119	Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.	***
124	Formes quadratiques. Applications.	***
128	Coniques.	**
140	Endomorphismes nilpotents.	**