Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

M. Coste

Dénombrement et polyèdres réguliers

Michel Coste - Février 2003

Une société fabrique la collection de tous les dodécaèdres réguliers (de même taille) avec six faces noires et six faces blanches. Combien y a-t-il de modèles différents ?

Ce petit exercice utilise la formule de Burnside et la connaissance du groupe des rotations du dodécaèdre. Il s'inspire de livre *Algebra* de M. Artin. On peut le placer dans la leçon sur les dénombrement ou dans une leçon sur les sous-groupes finis du groupe orthogonal.

La formule de Burnside figurait explicitement dans le programme du concours avant sa dernière révision. Elle concerne un groupe G opérant sur un ensemble S. La voici :

$$|G| \times \text{nombre d'orbites} = \sum_{g \in G} |S^g| \,,$$

où les barres désignent le cardinal d'un ensemble et S^g est l'ensemble des éléments de S fixés par g. Voir l'exercice 7, page 196 du livre de M. Artin. L'idée est de compter de deux manières différentes le nombre de couples $(g, s) \in G \times S$ tels que $g \cdot s = s$ et de se souvenir que $|G| = |G_s| \times |O_s|$, où G_s est le stabilisateur de s et O_s son orbite.

M. Artin propose un petit exercice d'application de cette formule (exercice 8), mais le problème proposé ci-dessus est plus intéressant. Dans ce problème, S est l'ensemble des façons de poser six faces noires sur un dodécaèdre (douze faces), sans identification par les rotations, et G est le groupe des rotations du dodécaèdre agissant sur S. Le cardinal de S est $\binom{12}{6}$. Le nombre de modèles distincts est le nombre d'orbites.

Le livre d'Artin contient les informations sur le dodécaèdre et son groupe de rotations. On peut compter les arêtes (30) et les sommets (20) du dodécaèdre en sachant que chaque face a 5 sommets et 5 arêtes, qu'une arête est commune à deux faces et un sommet à trois faces. Le groupe des rotations du dodécaèdre agit simplement et transitivement sur les couples formés d'un sommet et d'une arête partant de ce sommet, ce qui donne $|G| = 20 \times 3 = 60$. Ce groupe comprend (voir p. 200) :

- L'identité.
- Les rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux d'arêtes opposées (il y en a $30/2 = 15$).
- Les rotations d'orde 3 d'axe passant par deux sommets opposés (il y en a $2 \times (20/2) = 20$).
- Les rotations d'ordre 5 d'axe passant par les centres de faces opposées (il y en a $4 \times (12/2) = 24$).

Ceci fait bien 60 au total, et on a donc la liste complète. On peut, en suivant Artin, établir l'équation aux classes

$$60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12 \,,$$

en déduire la simplicité du groupe des rotations, puis son isomorphisme avec le groupe alterné A_5 (digression par rapport à l'exercice).

Il reste à calculer $|S_g|$ pour chaque rotation g.

- Pour l'identité, c'est bien sûr $|S|$.
- Soit g une rotation d'ordre deux. Elle n'envoie aucune face sur elle même (une rotation qui envoie une face sur elle-même doit laisser fixe son centre, donc c'est l'identité ou une rotation d'axe pasant par les centres de faces opposées). Il y a 6 orbites à deux éléments pour l'action de g sur l'ensemble des faces, et un coloriage est fixe par g si et seulement si les deux faces dans chaque orbite sont de même couleur. Comme on veut autant de faces noires que de blanches, on obtient $|S_g| = \binom{6}{3}$.
- Soit g une rotation d'ordre trois. On raisonne comme ci-dessus, en constatant qu'il y a 4 orbites à trois éléments pour l'action de g sur l'ensemble des faces. Donc $|S_g| = \binom{4}{2}$.
- Soit g une rotation d'ordre 5. Cette fois-ci il y a deux faces fixes pour l'action de g et deux orbites composées chacune de 5 faces. Les deux faces fixes doivent être de couleurs différentes et les deux orbites aussi, ce qui donne $|S_g] = 2 \times 2 = 4$.

La formule de Burnside nous donne, pour le nombre d'orbites sous G dans S :

$$\frac{1}{60}\left(\binom{12}{6} + 15 \times \binom{6}{3} + 20 \times \binom{4}{2} + 24 \times 4\right) = 24 \; .$$

Un exercice un peu plus périlleux du point de vue des calculs est le problème analogue pour les dodécaèdres avec dix faces blanches et dix noires. On trouve alors 3158 modèles différents.

Complément : Théorème de Polya (voir Comtet : Analyse combinatoire, tome 2, P. 90).

Supposons maintenant que le fabricant dispose de q couleurs et qu'il veuille faire des dodécaèdres avec n_1 faces de la première couleur, ..., n_q faces de la q^{e} couleur ($n_1 + \cdots + n_q = 12$). Combien y a-t-il de modèles différents ?

La clé est encore la formule de Burnside. Ici S est l'ensemble des coloriages de type $(n_1, \ldots, n_q)$ (avec n_1 faces de couleur 1, etc.) sans identification par les rotations. Un coloriage est fixé par une rotation g si et seulement si toutes les faces dans une même orbite sous g ont même couleur. Il est donc donné par le choix d'une couleur pour chaque orbite. Associons une indéterminée X_i ($i = 1, \ldots, q$) à chaque couleur. La discussion précédente devrait vous convaincre que le cardinal $|S^g|$ de l'ensemble des coloriages de type $(n_1, \ldots, n_k)$ fixés par g est le coefficient de $X_1^{n_1} \cdots X_q^{n_q}$ dans le polynôme

$$\prod_{\sigma \text{ orbite sous } g} \left(X_1^{|\sigma|} + \cdots + X_q^{|\sigma|}\right) \; .$$

Le nombres de modèles différents est donc le coefficient de $X_1^{n_1} \cdots X_q^{n_q}$ dans le polynôme

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\prod_{\sigma \text{ orbite sous } g} \left(X_1^{|\sigma|} + \cdots + X_q^{|\sigma|}\right) \right) \; .$$

Pour appliquer cette formule, on utilise bien entendu la description des rotations du dodécaèdre et des orbites de leur action sur l'ensemble des faces qui est donnée plus haut. Par exemple, le nombre de dodécaèdres avec 2 faces bleues, 4 blanches et 6 rouges est le coefficient de $X_1^2 X_2^4 X_3^6$ dans

$$\frac{1}{60} \begin{pmatrix} (X_1 + X_2 + X_3)^{12} \\ +15(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^6 \\ +20(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3)^4 \\ +24(X_1^5 + X_2^5 + X_3^5)^2 (X_1 + X_2 + X_3)^2 \end{pmatrix} .$$

Ceci fait

$$\frac{1}{60} \left(\binom{12}{2} \times \binom{10}{4} + 15 \binom{6}{1} \times \binom{5}{2} + 20 \times 0 + 24 \times 0 \right) = 246 .$$

Les coefficients du polynôme ci-dessus fournissent la solution à tous les décomptes de modèles de dodécaèdre coloriés en 3 couleurs. On peut faire calculer ces coefficients par Maple : voir la page suivante

```
>   P:=(1/60)*( (X_1+X_2+X_3)^12 +
>   15*(X_1^2+X_2^2+X_3^2)^6  +
>   20* (X_1^3+X_2^3+X_3^3)^4
>   +24*(X_1^5+X_2^5+X_3^5)^2*(X_1+X_2+X_3)^2);
```

$$P := \frac{1}{60}\,(X\_1 + X\_2 + X\_3)^{12} + \frac{1}{4}\,(X\_1^2 + X\_2^2 + X\_3^2)^6 + \frac{1}{3}\,(X\_1^3 + X\_2^3 + X\_3^3)^4 + \frac{2}{5}\,(X\_1^5 + X\_2^5 + X\_3^5)^2\,(X\_1 + X\_2 + X\_3)^2$$

```
>   simplify(P);
```

$$\begin{aligned}
&312\,X_1^6\,X_2^3\,X_3^3 + 3\,X_2^{10}\,X_1\,X_3 + 94\,X_1^5\,X_3^6\,X_2 + 94\,X_1^6\,X_2^5\,X_3\\
&+ 57\,X_1^2\,X_2^2\,X_3^8 + 94\,X_1^6\,X_3^5\,X_2 + 3\,X_3^{10}\,X_1\,X_2\\
&+ 246\,X_1^2\,X_2^6\,X_3^4 + 600\,X_1^4\,X_2^4\,X_3^4 + 57\,X_1^2\,X_2^8\,X_3^2\\
&+ 246\,X_1^4\,X_2^6\,X_3^2 + 94\,X_1^5\,X_2^6\,X_3 + 246\,X_1^4\,X_2^2\,X_3^6\\
&+ 278\,X_2^5\,X_3^5\,X_1^2 + 3\,X_1^{10}\,X_2\,X_3 + 278\,X_1^5\,X_2^5\,X_3^2\\
&+ 94\,X_2^5\,X_3^6\,X_1 + 246\,X_1^6\,X_2^4\,X_3^2 + 57\,X_1^8\,X_2^2\,X_3^2\\
&+ 246\,X_1^6\,X_2^2\,X_3^4 + 94\,X_2^6\,X_3^5\,X_1 + 312\,X_1^3\,X_2^3\,X_3^6\\
&+ 246\,X_1^2\,X_2^4\,X_3^6 + 278\,X_1^5\,X_3^5\,X_2^2 + 312\,X_1^3\,X_2^6\,X_3^3\\
&+ 24\,X_2^6\,X_3^6 + 12\,X_2^8\,X_3^4 + 3\,X_2^{10}\,X_3^2 + 3\,X_1^{10}\,X_2^2 + 12\,X_1^8\,X_2^4\\
&+ 3\,X_1^{10}\,X_3^2 + 3\,X_1^2\,X_2^{10} + 12\,X_2^4\,X_3^8 + 3\,X_1^2\,X_3^{10}\\
&+ 66\,X_1\,X_2^4\,X_3^7 + 33\,X_1\,X_2^3\,X_3^8 + 11\,X_1\,X_2^2\,X_3^9\\
&+ 132\,X_1^2\,X_2^3\,X_3^7 + 11\,X_1^2\,X_2\,X_3^9 + 11\,X_1\,X_2^9\,X_3^2\\
&+ 33\,X_1\,X_2^8\,X_3^3 + 66\,X_1\,X_2^7\,X_3^4 + 11\,X_1^2\,X_2^9\,X_3\\
&+ 132\,X_1^2\,X_2^7\,X_3^3 + 132\,X_1^3\,X_2^7\,X_3^2 + 462\,X_1^3\,X_2^5\,X_3^4\\
&+ 462\,X_1^3\,X_2^4\,X_3^5 + 132\,X_1^3\,X_2^2\,X_3^7 + 33\,X_1^3\,X_2\,X_3^8\\
&+ 66\,X_1^4\,X_2\,X_3^7 + 33\,X_1^3\,X_2^8\,X_3 + 462\,X_1^4\,X_2^3\,X_3^5\\
&+ 462\,X_1^5\,X_2^3\,X_3^4 + 66\,X_1^4\,X_2^7\,X_3 + 462\,X_1^4\,X_2^5\,X_3^3\\
&+ 462\,X_1^5\,X_2^4\,X_3^3 + 33\,X_1^8\,X_2^3\,X_3 + 33\,X_1^8\,X_2\,X_3^3\\
&+ 66\,X_1^7\,X_2^4\,X_3 + 132\,X_1^7\,X_2^3\,X_3^2 + 132\,X_1^7\,X_2^2\,X_3^3\\
&+ 66\,X_1^7\,X_2\,X_3^4 + 11\,X_1^9\,X_2^2\,X_3 + 11\,X_1^9\,X_2\,X_3^2 + 12\,X_1^8\,X_3^4\\
&+ 24\,X_1^6\,X_3^6 + 24\,X_1^6\,X_2^6 + 12\,X_1^4\,X_2^8 + 12\,X_1^4\,X_3^8 + X_1^{12} + X_2^{12}\\
&+ X_3^{12} + 3\,X_2^2\,X_3^{10} + 5\,X_1^9\,X_2^3 + 5\,X_1^9\,X_3^3 + 5\,X_1^3\,X_2^9\\
&+ 5\,X_1^3\,X_3^9 + 5\,X_2^9\,X_3^3 + 5\,X_2^3\,X_3^9 + X_1^{11}\,X_3 + 14\,X_1^7\,X_2^5\\
&+ 14\,X_1^5\,X_2^7 + 14\,X_1^7\,X_3^5 + 14\,X_1^5\,X_3^7 + X_2^{11}\,X_1 + X_2^{11}\,X_3\\
&+ 14\,X_2^7\,X_3^5 + 14\,X_2^5\,X_3^7 + X_3^{11}\,X_1 + X_3^{11}\,X_2 + X_1^{11}\,X_2
\end{aligned}$$