Université de Rennes 1 – Préparation
à l'agrégation de mathématiques
http://agreg-maths.univ-rennes1.fr

A propos d'un développement passe-partout concernant les invariants de similitude et la dualité

Michel Coste

Mars 2001, revu Juin 2004

Le développement mentionné dans le titre est tiré de [Gou], pages 280-281. C'est la partie « existence » du théorème sur les invariants de similitude. La démonstration de Gourdon utilise de la dualité, ce qui fait que ce développement peut se placer dans plusieurs leçons d'algèbre linéaire. Il présente l'inconvénient d'être sans doute beaucoup utilisé, et peut-être de cacher un peu le ressort de la démonstration. L'objectif de ce texte est d'en donner une version plus conceptuelle. Puisqu'elle n'utilise pas de base, la démonstration ci-dessous n'offre bien sûr pas d'illustration de la notion de base duale...

Tout d'abord, deux remarques d'ordre général sur le transposé d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K :

1. Pour tout polynôme P de $K[X]$ on a $P({}^tf) = {}^t(P(f))$. Donc P annule ${}^tf$ si et seulement s'il annule f. Par conséquent le polynôme minimal de f (que nous noterons Π_f) est égal à celui de ${}^tf$.
2. E est monogène[1] pour f si et seulement si E^* est monogène pour ${}^tf$. En effet, $\deg \Pi_f = \dim E$ équivaut à $\deg \Pi_{{}^tf} = \dim E^*$.

Précisons la situation. On a un espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme f de E, de polynôme minimal Π_f. Alors il existe un sous-espace vectoriel F de E, stable par f, monogène pour f, et tel que le polynôme minimal de la restriction de f à F (nous noterons g cette restriction) soit égal à Π_f. Ce fait se démontre en utilisant le lemme des noyaux, mais ce n'est pas ce point qui nous intéresse ici[2]. L'objectif est de démontrer qu'il existe un supplémentaire de F *stable par* f. Ceci permettra de poursuivre par récurrence, en considérant la restriction de f à ce supplémentaire.

L'inclusion $j : F \hookrightarrow E$ donne par transposition une application linéaire surjective ${}^tj : E^* \to F^*$. Si u est une forme linéaire sur E, ${}^tj(u)$ est la restriction de u à F. Supposons qu'il existe un sous-espace Γ de E^* stable par ${}^tf$ et tel que ${}^tj$ induise un isomorphisme $\Gamma \simeq F^*$. Alors l'orthogonal Γ° est stable par f. Montrons que Γ° est un supplémentaire de F. Tout d'abord, il a la bonne dimension car $\dim \Gamma^\circ = \dim E - \dim \Gamma$ et $\dim \Gamma = \dim F^* = \dim F$. Il suffit donc de vérifier que $F \cap \Gamma^\circ = \{0\}$. Soit $y \in F \cap \Gamma^\circ$. Pour tout $u \in \Gamma$, on a $u(y) = 0$ et donc ${}^tj(u)(y) = 0$. Puisque ${}^tj(\Gamma) = F^*$, on en déduit que toute forme linéaire sur F annule y, et donc y est nul. Ceci montre que Γ° est un supplémentaire de F stable par f.

Il reste à expliquer comment trouver un sous-espace Γ de E^* vérifiant les propriétés voulues (c'est-à-dire comment relever F^* en un sous-espace de E^*

[1] Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est dit *monogène* (ou *cyclique*) pour un endomorphisme $f : E \to E$ si et seulement s'il existe un vecteur $x \in F$ tel que F soit engendré par les $f^i(x)$ ($i \in \mathbb{N}$) ; un tel vecteur x est alors appelé *vecteur cyclique* de F (pour f). Pour un endomorphisme $f : E \to E$ d'un espace vectoriel de dimension finie, on a l'équivalence E monogène si et seulement si $\dim(E) = \deg(\Pi_f)$ ([Gob], ch. 7, III.3 ou [Gou], bas de page 280).

[2] On peut remarquer que ce fait entraîne le côté difficile de l'équivalence mentionnée dans la note ci-dessus : si $\dim(E) = \deg(\Pi_f)$, alors E est cyclique pour f.

stable par ${}^tf$). C'est ici qu'interviennent les propriétés de F. Puisque F est monogène pour la restriction g de f, F^* est monogène pour ${}^tg$ (remarque 2). Soit $v \in F^*$ un vecteur cyclique pour ${}^tg$, et soit $u \in E^*$ tel que ${}^tj(u) = v$. Prenons pour Γ le plus petit sous-espace de E^* stable par ${}^tf$ et contenant u (donc u est vecteur cyclique de Γ pour ${}^tf$). Puisque ${}^tj \circ {}^tf = {}^tg \circ {}^tj$ (on transpose simplement le fait que g est la restriction de f à F), l'image ${}^tj(\Gamma)$ est stable par ${}^tg$. Comme ${}^tj(\Gamma)$ contient v, on a ${}^tj(\Gamma) = F^*$. Par ailleurs Γ est monogène pour ${}^tf$ et donc $\dim \Gamma \leq \deg \Pi_{{}^tf} = \deg \Pi_f$; en utilisant $\deg \Pi_f = \dim F$, on obtient $\dim \Gamma \leq \dim F^*$. De cette inégalité et de ${}^tj(\Gamma) = F^*$ on déduit que ${}^tj$ induit un isomorphisme de Γ sur F^*. Notre objectif est atteint.

Les notations adoptées ci-dessus sont proches de celles de [Gou] pour faciliter la comparaison. Le e_k^* de [Gou] joue le rôle du u du paragraphe ci-dessus.

Retour sur un développement passe-partout concernant les invariants de similitude et la dualité

Daniel Ferrand

mai 2004

Ce texte est très proche de celui qui précède. Son seul but est de montrer, avec force détails, un autre style possible. Il est destiné à ceux qui, comme moi, raisonnent plus aisément avec des diagrammes qu'avec des formules. À chacun de trouver la façon d'exprimer les mathématiques qui lui convient, et qu'il retient le plus facilement.

On considère un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$ d'un K-espace vectoriel de dimension finie. On pose $A = K[X]$, et on désigne par $\Pi \in A$ le polynôme minimal de f, c'est-à-dire le générateur unitaire de l'idéal de A formé des polynômes P tels que $P(f) = 0$. Il s'agit de donner une démonstration, utilisant la dualité, de la proposition suivante.

Proposition *Soit $F \subset E$ un sous-espace cyclique pour f. On suppose que le polynôme minimal de la restriction de f à F est égal à Π. Alors F admet un supplémentaire stable sous f.*

Notons $g : F \longrightarrow F$ la restriction de f à F, et $j : F \longrightarrow E$ l'injection du sous-espace F dans E. On a donc

$$fj = jg,$$

Cela se traduit par la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{j} & E \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ F & \xrightarrow[j]{} & E \end{array}$$

On va construire le supplémentaire F' de F comme noyau d'une application linéaire

$$p : E \longrightarrow F$$

ayant les propriétés suivantes :
1) $pj = \mathrm{Id}_F$ (Cela implique que $F' = \mathrm{Ker}(p)$ est un supplémentaire de F : en effet, pour $x \in E$,on a $x = jp(x) + (x - jp(x))$, avec $jp(x) \in F$, et $x - jp(x) \in \mathrm{Ker}(p)$)
2) $pf = gp$ (Pour que F' soit stable sous f).

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r] \arrow[d, dotted] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ F' \arrow[r] & E \arrow[r, "p"'] & F \end{tikzcd}$$

Il s'avère plus naturel de construire d'abord la duale de p, puis d'utiliser le principe de dualité suivant.
Si V et W sont deux K-espaces vectoriels de dimension finie, le passage aux applications duales

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*), \quad (V \overset{u}{\to} W) \longmapsto (V^* \overset{{}^tu}{\leftarrow} W^*)$$

est une application bijective.

On va donc construire une application linéaire $E^* \overset{q}{\longleftarrow} F^*$ ayant les deux propriétés suivantes
1*) ${}^tjq = \mathrm{Id}_{F^*}$;
2*) $q{}^tg = {}^tfq$.

Ensuite, du principe de dualité on pourra déduire l'existence d'une unique application p telle que ${}^tp = q$ (puisque $u \mapsto {}^tu$ est surjective), et qu'elle possèdera les propriétés 1) et 2) (puisque $u \mapsto {}^tu$ est injective). Ainsi la propriété 1) sera vérifiée puisque pj et Id_F ont pour duale les applications ${}^tj{}^tp(= {}^tjq)$ et Id_{F^*}, lesquelles sont égales d'après 1*). De même, pf et gp sont égales puisque leurs duales ${}^tfq$ et $q{}^tg$ sont supposées l'être.

Considérons une forme linéaire $u \in E^*$, et sa restriction à F, $v \in F^*$; on a donc $v = u \circ j = {}^tj(u)$. Ces éléments u et v déterminent les applications linéaires (en fait, A-linéaires) usuelles $A = K[X] \longrightarrow E^*$ et $A \longrightarrow F^*$ définies respectivement par $P(X) \mapsto P({}^tf)(u) = u \circ P(f)$, et

$$P(X) \mapsto P({}^tg)(v) = v \circ P(g) = (u \circ j) \circ P(g) = u \circ P(f) \circ j = {}^tj(P({}^tf)(u)).$$

Comme le polynôme minimal Π annule f et g, on obtient, par passage au quotient le triangle commutatif (i.e $s = {}^tj \circ r$) suivant d'applications A-linéaires :

$$\begin{tikzcd} & K[X]/(\Pi) \arrow[dl, "r"'] \arrow[d, "s"] \\ E^* \arrow[r, "{}^tj"'] & F^* \end{tikzcd}$$

Cette construction utilise uniquement la stabilité de F sous f. On va déduire des autres hypothèses qu'on peut choisir u pour que s soit un isomorphisme, ce qui permettra de définir l'application cherchée par

$$q \quad = \quad r \circ s^{-1}.$$

Le point clé est que l'espace F^* est cyclique pour ${}^t g$, et que le polynôme minimal de ${}^t g$ est égal à Π : d'après [Gob], ch. 7, III.3, il suffit de voir que le degré du polynôme minimal de ${}^t g$ est égal à $\dim(F^*)$; or, pour $P \in K[X]$, les relations $P(g) = 0$ et $P({}^t g) = {}^t P(g) = 0$ sont équivalentes d'après le principe de dualité, donc ce polynôme minimal est égal à celui de g, qui, par hypothèse est égal à Π ; de plus, $\dim(F^*) = \dim(F)$.

Il existe donc une forme linéaire $v : F \to K$ telle que l'élément $v \in F^*$ soit un vecteur cyclique pour ${}^t g$. Cela signifie exactement que l'application

$$s : K[X]/(\Pi) \quad \longrightarrow \quad F^*$$

est un isomorphisme. Il suffit alors de prendre pour $u : E \to K$ une forme linéaire qui prolonge v.

Références

[Gou] X. Gourdon : *Maths en tête : Algèbre*

[Gob] R. Goblot : *Algèbre linéaire*, Masson 1995