Université de Rennes 1 – Préparation
à l'agrégation de mathématiques
http://agreg-maths.univ-rennes1.fr

Systèmes d'équations linéaires et courbes passant par des points fixés

Michel Coste

Le résultat suivant (théorème 1) peut servir à illustrer la leçon sur les systèmes linéaires. L'exposé nécessite une petite familiarité avec les courbes algébriques dans le plan projectif ; il peut consister en la démonstration de la proposition 6 et du théorème 1, en admettant la version faible du théorème de Bézout sur l'intersection de courbes dont on a besoin, à savoir :

> *Soient Φ une courbe de degré m et Ψ une courbe de degré n qui ont plus de mn points en commun ; alors Φ et Ψ ont une composante commune.*

On peut ensuite en déduire les théorèmes de Pappus et de Pascal.

La question de la détermination de courbes algébriques par la condition de passer par un certain nombre de points fixés a joué un rôle important dans le développement de l'algèbre linéaire.

1 L'énoncé, et quelques conséquences

Théorème 1 *Soient Φ et Ψ deux cubiques projectives, sans composante commune, qui se coupent en neuf points distincts. Toute cubique qui passe par huit de ces points passe par le neuvième.*

Ce théorème est un cas particulier d'un énoncé connu comme "Théorème de Cayley-Bacharach". Pour une présentation de ce théorème, de son histoire et de ses prolongements dans la géométrie algébrique contemporaine, on peut voir [EGH].

On travaille ici avec des courbes algébriques dans le plan projectif. Une telle courbe est donnée par son équation, qui est un polynôme homogène non nul en trois variables x, y, z, défini à un facteur constant non nul près. Autrement dit, une courbe algébrique de degré n est un élément de l'espace projectif associé à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n en x, y, z. Une droite projective est donnée par une forme linéaire non nulle

$\Delta(x, y, z)$ (définie à un facteur constant non nul près). Une conique projective est donnée par une forme quadratique non nulle $\Gamma(x, y, z)$ (définie à un facteur constant non nul près). Une cubique est donnée par une équation de degré 3. On désignera de manière abusive la courbe par une de ses équations.

La courbe Φ passe par le point $(a : b : c)$ du plan projectif si et seulement si $\Phi(a, b, c) = 0$; comme Φ est homogène, ceci ne dépend pas du système de coordonnées homogènes choisi pour le point. On dit aussi que le point $(a : b : c)$ appartient à Φ, mais une courbe algébrique n'est pas forcément déterminée par l'ensemble de ses points. Le produit des courbes Φ et Ψ est la courbe d'équation $\Phi\Psi$; l'ensemble des points de $\Phi\Psi$ est la réunion des ensembles des points de Φ et Ψ. On dit que les deux courbes Φ et Ψ ont une composante commune quand Φ et Ψ ont un facteur commun de degré > 0.

Le théorème 1 comprend les théorèmes de Pappus et de Pascal.

Théorème 2 (Pappus) *Dans un plan projectif, on se donne deux droites distinctes Δ et Δ' se coupant en O, trois points A, B, C (resp. A', B', C') sur Δ (resp. sur Δ'), distincts et différents de O. Les trois points $M = (AB') \cap (A'B)$, $N = (BC') \cap (B'C)$ et $P = (CA') \cap (C'A)$ sont alignés.*

Théorème 3 (Pascal) *Dans un plan projectif, soient six points distincts A, B, C, A', B', C' sur une conique non dégénérée Γ. Les trois points $M = (AB') \cap (A'B)$, $N = (BC') \cap (B'C)$ et $P = (CA') \cap (C'A)$ sont alignés.*

Démonstration de Pappus et de Pascal à partir du théorème 1. Soit Φ_1 la cubique produit des droites $(AB'), (BC'), (CA')$, et soit Φ_2 la cubique produit des droites $(AB'), (BC'), (CA')$. Dans le cas de Pappus, notons Γ la conique produit des deux droites Δ et Δ'. Dans les deux cas, soit Ψ la cubique produit de Γ et de la droite (MN). Les deux cubiques Φ_1 et Φ_2 ont comme intersection les neuf points $A, B, C, A', B', C', M, N, P$, et Ψ passe par les huit premiers de ces points. Donc Ψ passe aussi par P. Puisque Γ ne passe pas par P, c'est que les trois points M, N, P sont alignés. $\square$

2 Courbes passant par des points

Proposition 4 *L'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n en x, y, z est de dimension $(n + 1)(n + 2)/2$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. L'espace des formes linéaires en x, y, z est bien de dimension 3. Un polynôme homogène de degré $n + 1$ en x, y, z s'écrit de manière unique sous la forme $x\Phi(x, y, z) + \Psi(y, z)$, où Φ est homogène de degré n et Ψ homogène de degré $n + 1$. Comme les polynômes homogènes de degré $n+1$ en 2 variables forment clairement un espace vectoriel de dimension $n+2$, on établit bien le pas de récurrence :

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + n + 2 = \frac{(n+2)(n+3)}{2} \ . \qquad \square$$

Les courbes algébriques planes de degré n forment donc un espace projectif de dimension $((n+1)(n+2)/2) - 1 = n(n+3)/2$.

La condition pour une courbe de degré n de passer par un point fixé est une équation linéaire homogène en ses $(n+1)(n+2)/2$ coefficients. Par exemple la condition pour la conique

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon yz + \varphi zx$$

de passer par le point $(a:b:c)$ s'exprime par l'équation linéaire en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$:

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + ab\delta + bc\varepsilon + ca\varphi = 0 \ .$$

Si on se fixe $n(n+3)/2$ points dans le plan, la condition pour une courbe de passer par ces points s'exprime donc par un système de $n(n+3)/2$ équations linéaires homogènes en ses $(n+1)(n+2)/2 = (n(n+3)/2) + 1$ coefficients. Ce système a donc toujours une solution non nulle. On a montré :

Proposition 5 *Par $n(n+3)/2$ points du plan il passe toujours une courbe de degré n.*

Remarquez que $n(n+3)/2$ fait deux points pour une droite, cinq pour une conique, neuf pour une cubique.

Une question naturelle à se poser est : est-ce-que cette courbe est unique, autrement dit est-ce que la courbe est déterminée par les $n(n+3)/2$ points ? Puisqu'une courbe correspond à une droite vectorielle dans l'espace des polynômes homogènes de degré n, ceci revient à demander que l'espace des solutions du système soit de dimension 1. Ou encore, que les $n(n+3)/2$ équations du système soient linéairement indépendantes. Ce n'est pas toujours le cas, bien entendu.

En rapprochant le décompte du nombre de coefficients pour une cubique et le théorème de Bézout, on aboutit à ce qui est connu comme le “paradoxe de Cramer-Euler”. Voici comme il est énoncé dans [Eul]

> I *Puisqu'il faut selon la première proposition 9 points pour déterminer une ligne du troisième ordre, par 9 points donnés on ne peut tire qu'une ligne du troisième ordre.*

II *Or, selon la seconde proposition, deux lignes du troisième ordre se peuvent couper en 9 points, donc on pourra marquer 9 points, par lesquels peuvent passer deux lignes du troisième ordre.*

Euler lève bien sûr la contradiction apparente, et son explication est une étape dans l'élaboration de la notion d'indépendance linéaire.

Voyons maintenant à quelle condition cinq points déterminent une unique conique. Remarquons d'abord que pour les questions que l'on considère ici, on peut choisr comme on veut un repère dans le plan projectif. En effet, un changement linéaire de coordonnées homogènes induit un automorphisme de l'anneau des polynômes en ces coordonnées, qui envoie un polynôme homogène de degré n sur un polynôme homogène de degré n.

Proposition 6 *Cinq points du plan projectif déterminent une unique conique (éventuellement dégénérée) si et seulement s'il n'y en a pas quatre alignés.*

Démonstration. Si quatre des cinq points sont alignés, il est clair qu'il y a plus d'une conique passant par ces points : prendre le produit de la droite contenant les quatre points avec n'importe quelle droite passant par le cinquième.

Supposons maintenant qu'il n'y a pas quatre points alignés parmi les cinq points donnés. On peut alors en choisir quatre formant un repère projectif. S'il n'y en a pas trois d'alignés, quatre quelconques conviennent. Si A, B, C sont alignés, on prend le repère projectif formé des deux autre points D, E et de deux parmi A, B, C qui ne sont pas sur la droite (DE). On peut donc choisir un repère projectif pour que les cinq points aient comme systèmes de coordonnées homogènes :

$$(1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:1:1), (a:b:c)\ ,$$

où a, b, c sont tels qu'il n'y en a pas deux nuls et qu'ils ne sont pas tous les trois égaux (ceci dit que le cinquième point est distinct des quatre premiers). La matrice du système linéaire homogène en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ qui exprime que la conique

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon yz + \varphi zx$$

passe par les cinq points est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & ab & bc & ca \end{pmatrix} .$$

Pour vérifier que cette matrice est de rang 5, il faut et il suffit de voir que la matrice extraite

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ab & bc & ca \end{pmatrix}$$

est de rang deux, ce qui s'exprime par le fait que les quantités $a(b-c)$, $b(c-a)$ et $c(b-a)$ ne sont pas nulles toutes les trois. Ceci équivaut justement aux conditions posées sur a, b, c. $\square$

On peut ajouter que cette unique conique est non-dégénérée si et seulement s'il n'y a pas trois points alignés parmi les cinq (voir par exemple [Ber], 16.1.4).

3 Démonstration du théorème 1

Une cubique a dix coefficients, et la condition de passer par neuf points fixés s'exprime par un système de neuf équations linéaires homogènes en ces dix coefficients. Le système formé par les neuf équations correspondant aux neufs points d'intersection de Φ et Ψ est de rang au plus huit : en effet, l'espace des solutions contient le plan vectoriel des $\lambda\Phi + \mu\Psi$. Il suffit donc de montrer qu'un sous-système formé par huit quelconques de ces équations est de rang huit ; on en déduira que la neuvième équation est combinaison linéaire des huit autres. Géométriquement, ceci veut bien dire que toute cubique qui passe par huit des points d'intersection passe par le neuvième (une forme linéaire est combinaison linéaire d'autres formes linéaires si et seulement si son noyau contient l'intersection des noyaux de celles-ci).

Considérons donc un sous-système formé par les équations correspondant à huit des points d'intersection. Ces huit équations sont indépendantes : aucune n'est combinaison linéaire des autres. On le vérifie en montrant que, pour tout point choisi parmi les huit, il existe une cubique qui contient les sept autres, mais pas le point choisi ; cette cubique sera en fait construite comme le produit d'une droite et d'une conique.

Tout d'abord une remarque : parmi les neuf points d'intersection, il n'y en a pas quatre alignés, et il n'y en a pas sept sur une conique. Sinon, on contredirait l'hypothèse que Φ et Ψ n'ont pas de composante commune. En effet, s'il y avait quatre points alignés, la droite qui les contient devrait être une composante commune de Φ et Ψ, d'après Bézout (intersection d'une droite et d'une cubique). S'il y en avait sept sur une conique et que cette conique ne se décompose pas en produit de deux droites, elle devrait être une composante commune de Φ et Ψ d'après Bézout (intersection d'une conique et d'une cubique). Si la conique se décompose en produit de deux droites, une de celles-ci contient au moins quatre des sept points, et on a vu qu'il n'y a pas quatre points alignés.

Soit A le point choisi parmi les huit. On peut trouver trois points B, C, D parmi les autres, non alignés et tels qu'aucun des côtés du triangle formé par ces trois points ne passe par A (en utilisant qu'il n'y a pas quatre points alignés : choisir d'abord B, puis C en dehors de la droite (AB), et finalement D sur aucune des trois droites (AB), (AC) et (BC)). Parmi les coniques passant par les quatre autres points E, F, G, H, il y en a une unique Γ_A passant par A, une unique Γ_B passant par B, et une unique Γ_C passant par C (on utilise le fait que quatre des points ne sont jamais alignés et la proposition 6). Les coniques $\Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ ne sont pas toutes les mêmes, car sinon les sept points B, C, D, E, F, G, H seraient sur une conique. Donc il y a au moins une conique parmi $\Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ différente de Γ_A, et donc qui ne passe pas par A ; disons que c'est le cas pour la conique Γ_D. Le produit de Γ_D avec la droite (BC) est une cubique qui ne passe pas par A. Ceci conclut la démonstration du théorème 1. $\square$

4 Bézout avec une droite ou une conique

On rappelle la version faible du théorème de Bézout :

> *Soient Φ une courbe de degré m et Ψ une courbe de degré n qui ont au moins $mn + 1$ points en commun ; alors Φ et Ψ ont une composante commune.*

On peut montrer ce résultat en utilisant le résultant de Φ et Ψ par rapport à z. Le point clé est que ce résultant est un polynôme homogène en x, y de degré mn (ou nul). Pour plus de détails, on peut se reporter à [Mal], p. 189. Nous allons indiquer ici comment montrer cette énoncé quand Φ est une droite ou une conique (avec une hypothèse de caractéristique $\neq 2$ dans ce dernier cas), en utilisant des paramétrisations. Ce sont les cas qu'on utilise dans la démonstration du théorème 1. On peut trouver le théorème de Bézout complet dans [Per], p. 125 ou [BrMa], p. 136 : si Φ et Ψ sont sans composante commune et si le corps est algébriquement clos, alors Φ et Ψ ont exactement mn points d'intersection comptés avec multiplicité.

On peut supposer que le corps de base est algébriquement clos en passant à la clôture algébrique. D'une part, ceci ne peut qu'ajouter des points communs à Φ et Ψ. D'autrepart, si Φ et Ψ ont un facteur non constant en commun sur la clôture algébrique, ils en ont aussi un sur le corps de base : on exprime l'existence d'un facteur commun non constant par l'existence de polynômes non nuls P de degré $< n$ et Q de degré $< m$ tels que $P\Phi = Q\Psi$;

si le système d'équations linéaires homogènes en les coefficients de P et Q qui exprime cette égalité a une solution non nulle sur la clôture algébrique, il en a aussi une sur le corps de base.

Pour ne pas avoir d'ennui avec les affirmations concernant les coniques, on supposera la caractéristique différente de 2.

Considérons le cas où Φ est une droite qui a au moins $n+1$ points en commun avec Ψ. On peut supposer, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, que Φ est y et que le point $(1:0:0)$ n'est pas un des $n+1$ points. Alors $(t:0:1)$ est une paramétrisation de Φ moins $(1:0:0)$, et le polynôme $\Psi(t,0,1)$ est un polynôme de degré $\leq n$ qui a au moins $n+1$ racines. Il est donc identiquement nul, ce qui entraîne que le polynôme $\Psi(x,0,z)$ (qui est homogène) est nul. Donc Ψ est divisible par $y=\Phi$.

Considérons le cas où Φ est une conique qui a $2n+1$ points en commun avec Ψ. Si Φ est dégénérée, c'est un produit de deux droites : une forme quadratique de rang inférieur ou ègal à deux sur un corps algébriquement clos est un produit de deux formes linéaires, ce qui se voit en utilisant la décomposition en carrés. Une de ces droites a au moins $n+1$ points en commun avec Ψ. D'après ce qui précède, Φ et Ψ ont bien une composante commune.

Si Φ n'est pas dégénérée, on peut après changement linéaire de coordonnées supposer que Φ est x^2-yz, et que le point $(0:1:0)$ n'est pas un des $2n+1$ points (voir [Ber] 16.1.3.2 ; on choisit un repère projectif (A,B,C,D) du plan en prenant B,C,D sur la conique et A l'intersection des tangentes en B et C à la conique). Remarquez que dans le plan affine obtenu en prenant $z=0$ comme droite de l'infini, notre conique est la parabole $y=x^2$. Alors $(t:t^2:1)$ est une paramétrisation de Φ moins le point à l'infini $(0:1:0)$, et le polynôme $\Psi(t,t^2,1)$ est un polynôme de degré $\leq 2n$ qui a au moins $2n+1$ racines. Il est donc identiquement nul. Faisons alors la division euclidienne de Ψ par x^2-yz, par rapport à la variable x :

$$\Psi(x,y,z)=\Lambda(x,y,z)(x^2-yz)+xR_1(y,z)+R_2(y,z)\ .$$

En rentrant la paramétrisation dans cette égalité, on trouve $0=tR_1(t^2,1)+R_2(t^2,1)$. Puisque $tR_1(t^2,1)$ n'a que des monômes de degrés impairs et $R_2(t^2,1)$ que des monômes de degré pair, on obtient $R_1(t^2,1)=R_2(t^2,1)=0$, d'où $R_1=R_2=0$ (remarquez que R_1 et R_2 sont homogènes). Donc $x^2-yz=\Phi$ divise Ψ.

Références

[Ber] M. Berger : *Géométrie.* Cedic - Fernand Nathan, 1979.

[BrMa] J. Briançon, P. Maisonobe : *Éléments d'algèbre commutative.* Ellipses, 2004.

[EGH] D. Eisenbud, M. Green, J. Harris : *Cayley-Bacharach theorems and conjectures.* Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1996), 295–323.

[Eul] L. Euler : *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes* (1748). Oeuvres complètes, t. XXVI, pp. 33–45.

[Mal] M-P. Malliavin : *Algèbre commutative.* Masson, 1984.

[Per] D. Perrin : *Géométrie algébrique.* InterÉditions, 1995.