DÉVELOPPEMENT 6

GROUPE DES ISOMÉTRIES DU CUBE

On considère un cube $\Gamma = ABCDA'B'C'D'$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$ (où $ABCD$ est une face et où $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$). On considère $G = \{f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_3); f(\Gamma) = \Gamma\}$.

Groupe des isométries du cube

Lemme. — *Si $f \in G$ alors f est un automorphisme affine qui induit une permutation s_f de l'ensemble des sommets de Γ et l'application $\varphi : G \to \mathcal{S}_X, f \mapsto s_f$ est un morphisme injectif.*

Démonstration. — Le sous-espace affine $f(\mathcal{E}_3)$ contient $f(\Gamma) = \Gamma$ donc contient un repère affine donc f est surjective, d'où bijective. De plus, f permute les points extrémaux de Γ *i.e.* ses sommets donc induit bien une bijection s_f de X. Si s_f alors f est l'identité puisque f stabilise un repère affine. □

Proposition. — *Les éléments de G sont des isométries.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'image par f d'un repère orthonormée est un repère orthonormé. On choisit la longueur d'un côté comme unité de longueur de sorte que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ soit orthonormé. L'image par f du plan $\mathcal{P}$ contenant une face comme $ABCD$ est le plan contenant les images mais Γ est contenu dans le demi-espace délimité par $\mathcal{P}$ donc il en est de même de son image (puisque $f(\Gamma) = \Gamma$) ; il s'ensuit que l'image du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ est un repère du même type (d'origine $f(A)$) donc est orthonormé. □

Description du stabilisateur d'un sommet

Si f stabilise A alors le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ a pour image un autre repère issu de A donc f a permuté les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$. Réciproquement, un tel repère est l'image de $\mathcal{R}$ par une isométrie f unique ; comme f est affine, f conserve le parallélisme donc Γ. Ainsi, le stabilisateur G_A est de A est d'ordre $3! = 6$. Ses éléments sont l'identité, les symétries planes orthogonales par rapport aux trois plans $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'})$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB'})$, la composée de deux telles symétries *i.e.* les rotations r et r^2 d'axe (AC') et d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

Tout $f \in G$ fixe l'isobarycentre du cube donc, si f fixe un sommet alors f fixe le sommet opposé et tout point de la droite qui les joint. Les stabilisateurs de deux sommets opposés sont donc égaux.

Ordre de G

Le groupe G agit de façon transitive sur l'ensemble E des sommets de Γ : pour appliquer A sur B (par exemple), il suffit de considérer la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de $[AB]$ et la connexité du graphe formé par les sommets et arêtes de Γ montre que l'on peut appliquer A sur n'importe quel sommet en composant de telles symétries. Donc l'orbite de A est E *i.e.* a 8 éléments or le stabilisateur de A a 6 éléments donc G a 48 éléments.

Sous-groupes d'ordre 3 de G

Soit H un sous-groupe d'ordre 3 de G, ce groupe agit sur l'ensemble E des sommets et les orbites de cette action sont de cardinal 1 et 3. Comme H n'est pas réduit à l'identité, il y a des orbites non ponctuelles donc E contient 1 ou 2 orbites non ponctuelles ; quoi qu'il en soit, H laisse fixe au moins deux sommets (en particulier H est contenu dans le stabilisateur d'un élément) donc (d'après l'étude du stabilisateur) au moins deux sommets opposés. Par exemple si ces sommets sont A et C' alors H est contenu dans $G_A \simeq \mathcal{S}_3$ et H est l'unique sous-groupe d'ordre 3 de G_A constitué de l'identité et des deux rotations r et r^2.

Tout Les éléments d'ordre 3 de G sont les 8 rotations d'axes les 4 grandes diagonales et d'angles $\pm\frac{2\pi}{3}$. Ainsi, il y a 4 sous-groupes de G d'ordre 3. Notons que les théorèmes de Sylow donnaient que ce nombre de 3-Sylow devait être congru à 1 modulo 3 et diviser 16, ce qui laissait 4 et 16 comme possibilités.

Permutation des grandes diagonales

Soit $f \in G$ alors $f \circ r \circ f^{-1}$, où r est la rotation d'axe (AC') et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, est d'ordre 3 donc c'est une rotation autour de l'une des grandes diagonales. C'est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $f(AC')$ donc f applique une grande diagonale sur une grande diagonale *i.e.* f permute les grandes diagonales *i.e.* on a un morphisme $\varphi : f \mapsto \sigma_f$.

Considérons le plan constitué par deux grandes diagonales alors la symétrie orthogonale par rapport à ce plan permute les deux autres grandes diagonales donc l'image de φ contient les transpositions de $\mathcal{S}_4$. Puisque ces dernières engendrent $\mathcal{S}_4$, l'image de φ est exactement $\mathcal{S}_4$.

Puisque φ est d'image $\mathcal{S}_4$ et G est d'ordre 48, le noyau est d'ordre 2. Donc $\ker\varphi$ est constitué de l'identité et de la symétrie par rapport à O. Tout élément f du centre de G commute avec les rotations donc laisse fixes les grandes diagonales donc le centre de G est contenu dans le noyau de φ. On vérifie aisément que la symétrie par rapport à O est dans le centre de G donc $\ker\varphi$ est exactement le centre de G.

Groupe des déplacements du cube

Le groupe $\mathcal{I}^+$ des déplacements est distingué dans $\mathcal{I}$ donc $G^+ = G \cap \mathcal{I}^+$ est distingué dans G. Puisque la symétrie s_O par rapport à O est une involution, on a $G^+ = G \cap \mathcal{I}^- = s_O G^+$. Les deux classes à gauche G^+ et $s_O G^+$ contiennent toutes deux 24 éléments. Puisque la restriction de φ à G^+ est injective, on a $G^+ \sim \mathcal{S}_4$.

Comme le centre $\{\mathrm{id}, s_O\}$ et G^+ sont distingués dans G d'ordres respectifs 2 et 24 et d'intersection triviale, on a un produit direct $G \simeq G^+ \times Z(G) \simeq \mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Leçons concernées

- 01 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications
- 08 Sous-groupes finis de $\mathcal{O}(2,\mathbb{R})$, de $\mathcal{O}(3,\mathbb{R})$. Applications
- 28 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.
- 30 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications
- 34 Utilisation des groupes en géométrie

Référence

F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

Sébastien Pellerin