DÉVELOPPEMENT 7

DÉCOMPOSITION POLAIRE

Théorème. — *L'application*

$$\mathcal{U}(n) \times \mathcal{H}^{++}(n) \to GL_n(\mathbb{C}), (U, H) \mapsto UH$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. — Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $(M^*M)^* = M^*M^{**} = M^*M$ donc la matrice M^*M est hermitienne ; d'autre part pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ non nul

$$X^*(M^*M)X = (MX)^*MX = \|MX\|^2 > 0$$

i.e. la matrice M^*M est hermitienne définie positive. Donc il existe $U \in \mathcal{U}(n)$ telle que la matrice $U^*(M^*M)U$ soit diagonale à coefficients diagonaux réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose alors

$$H = U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^*.$$

On a $H^* = H$ *i.e.* H est hermitienne. De plus pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ non nul

$$X^*HX = X^*U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^*X = (U^*X)^* \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^*X > 0$$

i.e. H est hermitienne définie positive. On pose $V = MH^{-1}$, alors

$$V^*V = (MH^{-1})^*MH^{-1} = (H^{-1})^*M^*MH^{-1} = (H^*)^{-1}U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*H^{-1}$$

d'où

$$V^*V = (U^*)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix} U^{-1}$$

or $U \in \mathcal{U}(n)$ donc

$$V^*V = (U^*)^{-1}U^{-1} = \mathrm{I}_n$$

i.e. $V \in \mathcal{U}(n)$ et on a bien l'existence de la décomposition polaire.

On considère une décomposition polaire quelconque $M = VH$, alors $M^*M = (VH)^*VH = H^*V^*VH$ or V est unitaire et H hermitienne donc $M^*M = H^2$. On note m et h les deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont respectivement M^*M et H. Si $\mu_1, \dots, \mu_k$ sont les valeurs propres de m (qui sont réelles positives) et $E_{\mu_1}, \dots, E_{\mu_k}$ sont les sous-espaces propres associés alors les E_{μ_i} sont stables par h (puisque m et h commutent) ; on peut donc considérer $h_i = h_{|E_{\mu_i}}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Comme h_i est hermitien, h_i est diagonalisable et toute valeur propre λ de h_i est réelle positive et vérifie $\lambda^2 = \mu_i$ donc $h_i = \sqrt{\mu_i}\mathrm{id}_{E_{\mu_i}}$. Ainsi, h est complètement déterminé par m *i.e.* H par M, ce qui assure l'unicité de la décomposition.

L'application $\mathcal{U}(n) \times \mathcal{H}^{++}(n) \to GL_n(\mathbb{C}), (U, H) \mapsto UH$ est continue. Réciproquement, considérons une suite $(M_p)_p$ de $GL_n(\mathbb{C})$ qui converge vers une matrice $M \in GL_n(\mathbb{C})$. On pose $M = UH$ et $M_p = U_p H_p$ pour tout p. Puisque le groupe $\mathcal{U}(n)$ est compact, la suite $(U_p)_p$ admet une sous-suite convergente $(U_{\varphi(p)})_p$ dont on note U_0 la limite ; alors la suite $(H_{\varphi(p)})_p$ converge vers une matrice hermitienne positive H_0 et, comme $H_0 = MU_0^{-1}$ est inversible, H_0 est définie positive. L'unicité de la décomposition polaire donne alors $U = U_0$ et $H = H_0$. Cela signifie que la suite $(U_p)_p$ n'admet que U pour valeur d'adhérence et comme $\mathcal{U}(n)$ est compact, $(U_p)_p$ converge vers U ; il en résulte que $(H_p)_p$ converge vers H. L'application réciproque est donc bien continue. □

Application. — $\mathcal{U}(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. — Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{U}(n)$, on considère un élément $A \in G$. La décomposition polaire permet d'écrire $A = UH$ avec U unitaire et H hermitienne définie positive. Puisque $A \in G$ et $U \in \mathcal{U}(n)$ avec $\mathcal{U}(n) \subset G$, la matrice $H = AU^*$ est dans G donc $(H^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'éléments de G ; puisque G est compact, cette suite est bornée. Soit λ une valeur propre de H, puisque la matrice H est hermitienne, elle est diagonalisable, le fait que la suite $(H^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit bornée implique donc que $|\lambda| = 1$. Or H est hermitienne définie positive donc ses valeurs propres sont réelles strictement positives, on obtient donc $H = \mathrm{I}_n$ *i.e.* $A = U \in \mathcal{U}(n)$ donc $G = \mathcal{U}(n)$. □

Remarque. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(M_p)_p$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ qui converge vers M ; pour tout p, on écrit $M_p = U_p H_p$ avec U_p unitaire et H_p hermitienne définie positive. Puisque $\mathcal{U}(n)$ est compact, la suite $(U_p)_p$ admet une sous-suite convergente $(U_{\varphi(p)})_p$ dont on note U la limite. Alors la suite $(U^*_{\varphi(p)} M_p)_p$ converge vers la matrice U^*M *i.e.* U^*M est la limite de la suite $(H_{\varphi(p)})_p$ donc $H := U^*M$ est hermitienne positive. On obtient donc bien $M = UH$ avec U unitaire et H hermitienne positive.

Leçons concernées

07 Groupes linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications

26 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie

27 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie

41 Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications

Références

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

Sébastien Pellerin