DÉVELOPPEMENT 9

VECTEURS PROPRES DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER DANS L^2

Lemme. — *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable non nulle presque partout et telle qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant $f = O(e^{-\delta|x|})$. Alors $\mathrm{Vect}(x^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. — Si $\mathrm{Vect}(x^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dense dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ alors il existe $h \in L^2(\mathbb{R})$ non nulle presque partout telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)h(x)dx = 0.$$

L'inégalité de Cauhcy-Schwarz donne $fh \in L^1(\mathbb{R})$ donc on peut considérer sa transformée de Fourier

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Si $0 < \xi < \delta$ alors $e^{\xi|x|}f(x)h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ d'après l'hypothèse sur f donc (en utilisant le théorème d'holomorphie sous le signe somme) g se prolonge analytiquement sur la bande $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\ (z) < \delta\}$. D'après la propriété vérifiée par h et en utilisant le théorème de dérivation de la transformée de Fourier, on obtient que toutes les dérivées de g sont nulles en 0. D'après l'analyticité de g, g est identiquement nulle et l'injectivité de la transformation de Fourier donne $fh = 0$ presque partout, c'est absurde puisque f et h sont toutes deux non nulles presque partout. □

La dérivée d'ordre n de $H(t) = e^{-t^2}$ est de la forme $e^{-t^2}H_n(t)$ où $H_n(t)$ est un polynôme appelé *polynôme de Hermite*, déterminé par la relation de récurrence $H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) + H_n'(t)$, de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$. Les *fonctions de Hermite* sont alors définies par

$$h_n(t) = (n!2^n\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}H_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Proposition. — *La famille $(h_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(e^{-t^2}dt)$.*

Démonstration. — Si P est un polynôme de degré au plus $n-1$ alors une intégration par parties donne (par définition de H_n et puisque $P^{(n)} = 0$)

$$\int_{\mathbb{R}} P(t)H_n(t)e^{-t^2}dt = \int_{\mathbb{R}} P(t)H^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} P^{(n)}(t)H(t)dt = 0$$

ce qui montre que la famille $(h_n)_n$ est orthogonale. La formule d'intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} (H_n(t))^2e^{-t^2}dt = \int_{\mathbb{R}} H_n(t)H^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_n^{(n)}(t)e^{-t^2}dt$$

d'où puisque le coefficient dominant de H_n est $(-2)^n$

$$\int_{\mathbb{R}} (H_n(t))^2e^{-t^2}dt = 2^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

donc $(h_n)_n$ est bien une famille orthonormale. Puisque les polynômes H_n sont de degré échelonnés, il découle du lemme que la famille $(h_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. □

Proposition. — $\widehat{h_n} = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n$

Démonstration. — On rappelle que la gaussienne $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ vérifie $\widehat{G}(x) = \sqrt{2\pi}G(x)$ *i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On remplace t par $t + 2u$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2+4ut+4u^2}{2}} e^{-itx} e^{-2iux} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2ut-u^2} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{u^2} e^{2iux} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{t^2}{2}} H(t+u) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{u^2} e^{2iux} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}$$

et cette intégrale est une fonction holomorphe en u donc on peut dériver de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{du^n} \left[H(t+u)\right] e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} \frac{d^n}{du^n} \left[H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}\right]$$

et pour $u = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} \frac{d^n}{du^n} \left[H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}\right]_{u=0} = \sqrt{2\pi} i^n H_n(-x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

i.e. en tenant compte de la parité de H_n

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} i^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

d'où $\widehat{h_n(x)} = \sqrt{2\pi} i^n h_n(x)$. □

Leçon concernée

36 Polynômes orthogonaux

Référence

A. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir Ellipses, 1994.