DÉVELOPPEMENT 11

DÉCOMPOSITION DE DUNFORD ET APPLICATIONS

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Lemme des noyaux. — *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes premiers entre eux deux à deux, alors*

(*i*) *les sous-espaces $E_i = \ker Q_i(f)$ sont en somme directe,*

(*ii*) $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} \ker Q_i(f) = \ker(Q_1 Q_2 \cdots Q_s)(f)$,

(*iii*) *les projecteurs associés à cette somme directe sont dans $\mathbb{K}[f]$*

Démonstration. — Posons $P_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} Q_i$ alors les P_i sont premiers dans leur ensemble. En effet, considérons un diviseur Δ des P_i alors Δ divise $P_1 = Q_2 \cdots Q_s$, donc un Q_{i_0} pour $i_0 \geq 2$, et Δ divise aussi $P_{i_0} = Q_1 \cdots Q_{i_0-1} Q_{i_0+1} \cdots Q_s$, donc un Q_i pour $i \neq i_0$; comme les Q_j sont premiers entre eux deux à deux, on obtient bien que Δ est inversible.

L'identité de Bézout donne alors $A_1 P_1 + \cdots + A_s P_s = 1$ pour $A_1, \dots, A_s \in \mathbb{K}[X]$, d'où

$$A_1(f)P_1(f) + \cdots + A_s(f)P_s(f) = \mathrm{id}.$$

Soit $x \in \ker(Q_1 \cdots Q_s)(f)$ alors

$$A_1(f)P_1(f)(x) + \cdots + A_s(f)P_s(f)(x) = x.$$

On pose $x_i = A_i(f)P_i(f)(x)$, on a

$$Q_i(f)(x_i) = Q_i(f)A_i(f)P_i(f)(x) = A_i(f)P_i(f)Q_i(f)(x) = A_i(f)(Q_1 \cdots Q_s)(f)(x) = 0$$

i.e. $x_i \in \ker Q_i(f)$. On a donc

$$\ker(Q_1 \cdots Q_s)(f) \subseteq \sum_{i=1}^{s} \ker Q_i(f)$$

et la réciproque est évidente puisque $\ker Q_i(f) \subseteq \ker(Q_1 \cdots Q_s)(f)$ pour tout i, d'où

$$\ker(Q_1 \cdots Q_s)(f) = \sum_{i=1}^{s} \ker Q_i(f).$$

Montrons que cette somme est directe : il suffit de montrer que si $\omega_1 + \cdots + \omega_s = 0$ avec $\omega_j \in \ker Q_j(f)$ alors tous les ω_j sont nuls. Pour $j \neq i$, on a $E_j = \ker Q_j(f) \subseteq \ker P_i(f)$ donc $A_i(f)P_i(f)(\omega_j) = 0$ et il s'ensuit que

$$A_i(f)P_i(f)(\omega_j) = (A_1(f)P_1(f) + \cdots + A_s(f)P_s(f))(\omega_1 + \cdots + \omega_s) = 0$$

donc

$$\omega_j = (A_1(f)P_1(f) + \cdots + A_s(f)P_s(f))\,(\omega_j) = A_1(f)P_1(f)(\omega_j) + \cdots + A_s(f)P_s(f)(\omega_j) = 0$$

Enfin, le projecteur sur E_j parallèlement à $E_1 \oplus \cdots \oplus E_{i-1} \oplus E_{i+1} \cdots \oplus E_s$ est $\pi_i = A_i(f)P_i(f)$ donc $\pi_i \in \mathbb{K}[f]$. $\square$

Théorème. — *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé alors il existe $d \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $u = d + n$ et vérifiant*
- *$d \circ n = n \circ d$*
- *d, n sont uniques avec cette propriété*
- *d et n sont des polynômes en f*

Démonstration. — On écrit $\mu_f = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_s)^{m_s}$ et on note $F_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}$ les sous-espaces caractéristiques correspondants, alors $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$ et les F_i sont stables, on définit donc d et n sur les F_i. On pose $d_{|F_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{F_i}$ et $n_{|F_i} = f - \lambda_i \mathrm{id}_{F_i}$. Alors $n_{|F_i}$ est nilpotent d'indice m_i donc n est nilpotent d'indice $m = \sup\{m_1, \ldots, m_s\}$. Sur chaque F_i, d_i est une homothétie donc $d \circ n = n \circ d$. Si on note p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $F_1 \oplus \cdots \oplus F_{i-1} \oplus F_{i+1} \oplus \cdots \oplus F_s$ alors $d = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_s p_s$ or, d'après le théorème de décomposition des noyaux, les projecteurs sont des polynômes en f donc d est un polynôme en f et c'est aussi le cas de $n = f - d$.

Supposons maintenant que $f = d' + n'$ soit une autre décomposition. Puisque d' commute avec n' (et avec d'), d' commute avec f donc d' laisse stable les $F_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}$. Or sur F_i, d et d' sont des homothéties donc commutent sur F_i et il en résulte que d et d' commutent sur E. Par conséquent, on peut diagonaliser d et d' dans une même base $\mathcal{B}$, ce qui signifie que dans $\mathcal{B}$ la matrice de $d - d'$ est diagonale. Mais comme d et d' commutent, $n = f - d$ et $n' = f - d'$ commutent aussi or n et n' sont nilpotents donc la formule de Newton donne

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{i+j=p+q} \mathrm{C}_{p+q}^{i} n^i (-1)^j (n')^j = 0$$

i.e. $n - n' = d' - d$ est nilpotent et diagonalisable donc $n - n' = d' - d = 0$. □

Application. — Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \exp B$.

Démonstration. — Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors, quitte à raisonner sur les blocs de Jordan de A, on peut supposer que A est de la forme $A = \lambda(\mathrm{I}_m + N)$ où N est nilpotente. On pose alors $C = \mathrm{I}_m + N$ et

$$D = \log C = N - \frac{N^2}{2} + \cdots + (-1)^m \frac{N^{m-1}}{m-1}$$

et on va montrer que $\exp D = C$. On considère

$$D(t) = tN - \frac{t^2}{2} N^2 + \cdots + (-1)^m \frac{t^{m-1}}{m-1} N^{m-1}$$

d'où en dérivant

$$D'(t) = N - tN^2 + \cdots + (-1)^m t^{m-2} N^{m-1}$$

et comme $N^m = 0$ (puisque N est nilpotente et que l'on considère des matrices de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$) on a

$$(\mathrm{I}_m + tN) D'(t) = N.$$

Puisque $D(t)$ et $D'(t)$ commutent, en posant $S(t) = \exp D(t)$, il vient

$$S'(t) = D'(t) \exp D(t) \ \textit{i.e.}\ (\mathrm{I}_m + tN) S'(t) = N S(t)$$

et en dérivant à nouveau, on obtient finalement $(\mathrm{I}_m + tN) S''(t) = 0$ or $\mathrm{I}_m + tN$ est inversible donc $S''(t) = 0$ d'où $S(t) = S(0) + tS'(0) = \mathrm{I}_m + tN$ et pour $t = 1$, on a bien $\exp D = \mathrm{I}_m + N = C$. Considérons maintenant $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $e^\mu = \lambda$ alors

$$\exp(\mu \mathrm{I}_m + D) = \exp(\mu \mathrm{I}_m) \exp D = \lambda \mathrm{I}_m . C = \lambda \mathrm{I}_m (\mathrm{I}_m + N) = A.$$

□

Application. — Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique χ_A scindé alors

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exp A \text{ diagonalisable.}$$

Démonstration. — Si A est diagonalisable alors $\exp A$ est clairement diagonalisable. Réciproquement, notons $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A alors $\exp A = \exp D \exp N$, puisque $DN = ND$. D'autre part A et D commutent donc il en est de même de $\exp(A)$ et $\exp(-D)$ or ces deux matrices sont diagonalisables donc on peut les diagonaliser dans une même base et $\exp N = \exp(-D) \exp A$ est donc aussi diagonalisable. Comme la matrice

$$\exp N = \mathrm{I}_n + N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}.$$

est unipotente, on a $\exp N = \mathrm{I}_n$ d'où

$$N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

et le polynôme

$$Q(X) = X + \frac{X^2}{2} + \cdots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$$

est annulateur pour N. Donc Q est divisible par le polynôme minimal de N qui est de la forme X^k avec $1 \leq k \leq n$ donc $\mu_N = X$ *i.e.* $N = 0$. $\square$

Application. — Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\rho(B) < 1$ alors $B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. — On se place dans une base de sous-espaces caractéristiques alors

$$B = P^{-1}CP \quad \text{où} \quad C = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathrm{I} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \mathrm{I} + N_s \end{bmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de B et les N_i sont nilpotents. Alors B^k tend vers 0 si et seulement si C^k tend vers 0 et on se ramène donc à montrer que chaque $(\lambda \mathrm{id} + N)^k$ tend vers 0. On note r l'ordre de nilpotence de N alors, puisque id et N commutent, pour tout $k \geq r$, on a

$$(\lambda \mathrm{id} + N)^k = \lambda^k \mathrm{id} + \mathrm{C}_k^1 \lambda^{k-1} N + \mathrm{C}_k^2 \lambda^{k-2} N^2 + \cdots + \mathrm{C}_k^{r-1} \lambda^{k-r+1} N^{r-1}.$$

Or $|\lambda| \leq \rho(B) < 1$ et les C_k^j sont des polynômes en k de degré au plus r donc $(\lambda \mathrm{id} + N)^k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. $\square$

Application. — Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée si et seulement si A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{S}^1$.

Démonstration. — On regarde la suite $(\lambda \mathrm{id} + N)^k$ pour $k \geq 0$, on a (avec r indice de nilpotence de N)

$$(\lambda \mathrm{id} + N)^k = \lambda^k \mathrm{id} + \mathrm{C}_k^1 \lambda^{k-1} N + \mathrm{C}_k^2 \lambda^{k-2} N^2 + \cdots + \mathrm{C}_k^{r-1} \lambda^{k-r+1} N^{r-1}$$

et la famille $\{\mathrm{id}, N, \ldots, N^{r-1}\}$ est libre donc le comportement de la suite $(\lambda \mathrm{id} + N)^k$ est le même que celui des monômes. La fait que $(\lambda \mathrm{id} + N)^k$ soit borné implique donc que $|\lambda| < 1$, ou que $|\lambda| = 1$ et $N = 0$. Pour $k = -\ell$ négatif, on a

$$(\lambda \mathrm{id} + N)^{-\ell} = \lambda^{-\ell} (\mathrm{id} + N')^{\ell}$$

et, d'après le cas précédent, le fait que $(\lambda \mathrm{id} + N)^{-\ell}$ soit borné implique que $\left|\lambda^{-1}\right| < 1$, ou que $\left|\lambda^{-1}\right| = 1$ et $N' = 0$. Finalement, on obtient $|\lambda| = 1$ et $N = 0$ *i.e.* A est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1. La réciproque est claire. $\square$

Leçons concernées

23 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications
24 Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications
37 Endomorphismes diagonalisables
39 Endomorphismes nilpotents
40 Polynômes d'endomorphismes. Applications

Référence

X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

Sébastien Pellerin