3 Théorème *abc* pour les polynômes

Soit $f(t)$ un polynôme à une indéterminée à coefficients dans un corps k de caractéristique 0. On note $n_0(f)$ le nombre de racines distinctes de f dans une clôture algébrique de k.

Théorème (Mason-Stothers). *Soient $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ des polynômes non constants et premiers entre eux tels que $a+b=c$. Alors* $\max\{d^\circ(a), d^\circ(b), d^\circ(c)\} \leqslant n_0(abc) - 1$.

Preuve.
Commençons par remarquer que les polynômes a, b et c sont deux à deux premiers entre eux en vertu de l'identité $a+b=c$.

On écrit que $a'c - ac' = a'(a+b) - a(a'+b') = a'b - ab'$. Le polynôme $a'b - ab'$ n'est pas nul, car sinon on aurait $a|a'$ (a étant premier avec b), ce qui est exclu si a n'est pas constant. Le pgcd $a \wedge a'$ de a et a' divise $a'b - ab'$, ainsi que $b \wedge b'$. Il en est de même de $c \wedge c'$, en vertu de l'égalité précédente.

Les polynômes a, b et c étant premiers entre eux, il en est de même des polynômes $a \wedge a'$, $b \wedge b'$ et $c \wedge c'$. Leur produit divise donc $a'b - ab'$, on en déduit que

$$d^\circ(a \wedge a') + d^\circ(b \wedge b') + d^\circ(c \wedge c') \leqslant d^\circ(a'b - ab') \leqslant d^\circ(a) + d^\circ(b) - 1.$$

Pour un polynôme $f(t)$, on a $d^\circ(f \wedge f') = d^\circ(f) - n_0(f)$, car la multiplicité dans f' d'une racine α de f est $m(\alpha) - 1$, où $m(\alpha)$ est la multiplicité de α dans f. En reportant dans l'inégalité précédente, on obtient $d^\circ(c) \leqslant n_0(a) + n_0(b) + n_0(c) - 1$.

Les polynômes a, b et c étant non constants et premiers entre eux, on a $n_0(abc) = n_0(a) + n_0(b) + n_0(c)$, si bien que l'inégalité se réécrit $d^\circ(c) \leqslant n_0(abc) - 1$.

Les positions de a, b et c étant essentiellement symétriques, la même inégalité est satisfaite par $d^\circ(a)$ et $d^\circ(b)$, et le théorème est montré.

$\square$

Corollaire (Théorème de Fermat pour les polynômes). *Soient $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ des polynômes non constants et non associés tels que $x(t)^n + y(t)^n = z(t)^n$ (où $n \in \mathbb{N}$). Alors $n \leqslant 2$.*

Preuve.
Quitte à diviser $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ par leur pgcd, on peut les supposer premiers entre eux. Les polynômes $x(t)^n$, $y(t)^n$ et $z(t)^n$ sont donc premiers entre eux, et on peut appliquer le théorème précédent : $d^\circ(x^n) \leqslant n_0(x^n y^n z^n) - 1$, avec des inégalités analogues pour y et z.

En remarquant que $d^\circ(x^n) = nd^\circ(x)$ et $n_0(x^n y^n z^n) = n_0(xyz) = n_0(x) + n_0(y) + n_0(z)$ d'où $n_0(x^n y^n z^n) \leqslant d^\circ(x) + d^\circ(y) + d^\circ(z)$, on déduit de l'inégalité précédente que

$nd^\circ(x) \leqslant d^\circ(x) + d^\circ(y) + d^\circ(z) - 1$. En sommant avec les inégalités similaires obtenues pour y et z, il vient $n(d^\circ(x) + d^\circ(y) + d^\circ(z)) \leqslant 3(d^\circ(x) + d^\circ(y) + d^\circ(z)) - 3$. Ceci n'est possible que si $n \leqslant 2$. $\square$

On peut citer comme autre application du théorème *abc* le résultat suivant, que je ne démontre pas ici (cf. [Lan04] ex. 13 p.225) :

Corollaire (Théorème de Davenport)**.** *Soient f et g des polynômes non constants tels que $f^3 \neq g^2$. Alors $d^\circ(f^3 - g^2) \geqslant d^\circ(f)/2 - 1$.*

Leçons possibles
118 Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.

Références
[Lan04] pp. 201 et suivantes.