4 Théorème de Lie-Kolchin

Théorème (Lie-Kolchin). *On note $\mathcal{B}$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles de $GL_n(\mathbb{C})$. Le théorème est le suivant :*
Si G est un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$, alors G est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{B}$ (autrement dit, les matrices de G sont simultanément trigonalisables).

Preuve.
On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons maintenant le résultat démontré pour les espaces de dimension $< n$ (pour un certain $n \geqslant 2$), et soit G un groupe connexe résoluble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

S'il existe un sous-espace strict et non trivial V de $\mathbb{C}^n$ stable sous l'action de G, le résultat s'ensuit facilement par récurrence. En effet, soit W un supplémentaire de V de sorte que $\mathbb{C}^n = V \oplus W$. Dans une base convenable, tout élément $g \in G$ a une matrice de la forme $\left[\begin{array}{c|c} g_1 & * \\ \hline 0 & g_2 \end{array}\right]$. On vérifie sans problème, en faisant un produit par blocs, que les applications $g \mapsto g_1$ et $g \mapsto g_2$ sont des morphismes de groupes, ils sont de plus évidemment continus (ce sont des projections). Le groupe $G_1 = \{g_1, g \in G\}$ (resp. $G_2 = \{g_2, g \in G\}$) est donc résoluble en tant qu'image d'un groupe résoluble par un morphisme de groupes, et il est connexe comme image continue d'un connexe. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à G_1 (resp. G_2) : il existe une matrice carrée inversible p_1 (resp. p_2), de la dimension qu'il faut, telle que toutes les matrices $p_1^{-1} g_1 p_1$ (resp. $p_2^{-1} g_2 p_2$) soient triangulaires supérieures. Il suffit alors d'appliquer la matrice de changement de base $p = \left[\begin{array}{c|c} p_1 & * \\ \hline 0 & p_2 \end{array}\right]$ aux éléments de g pour obtenir le résultat voulu.

Maintenant s'il n'existe pas de tel sous-espace V, on dit que G est irréductible (sur $\mathbb{C}^n$). Nous allons montrer qu'un sous-groupe connexe, résoluble et irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est commutatif, ce qui est un résultat intéressant en soi. Mais constatons tout de suite que cela permet de conclure : on sait que les matrices d'une partie commutative de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont simultanément trigonalisables. On peut rappeler rapidement l'argument : par récurrence sur leur dimension, des matrices qui commutent ont un vecteur propre commun, et on conclue de nouveau par récurrence sur la dimension de l'espace.

On considère donc dorénavant un sous-groupe connexe, résoluble et irréductible G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Notons m le plus petit des entiers k tels que le k-ème groupe dérivé $\mathrm{D}^k(G)$ soit réduit au groupe trivial $\{I_n\}$ (ce nombre existe par définition de la résolubilité de G). On raisonne par l'absurde et on suppose que G n'est pas commutatif, ce qui revient à dire que $m > 1$. Posons $H = \mathrm{D}^{m-1}(G)$, nous allons montrer que $H = \{I_n\}$, ce qui constituera la contradiction.

Montrons d'abord que les matrices de H sont simultanément diagonalisables. Soit V le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ des vecteurs propres communs à tous les éléments de H, il s'agit donc de montrer que $V = \mathbb{C}^n$. Par irréductibilité de G, il suffit de montrer que V est non trivial et stable par G. Pour le premier point, remarquons que H est commutatif : $\mathrm{D}(H) = \{I_n\}$. Il existe donc un vecteur propre commun à tous les éléments de H, ce qui assure que V n'est pas réduit à $\{0\}$. Et le second point : soit $g \in G$ et $v \in V$, on veut montrer que $g(v) \in V$, c'est-à-dire que $g(v)$ est un vecteur propre de h pour tout $h \in H$. Pour cela on écrit que $h(g(v)) = g((g^{-1}hg)(v))$. H étant distingué dans G, $g^{-1}hg$ est un élément de H si bien qu'il existe un scalaire λ tel que $(g^{-1}hg)(v) = \lambda v$. Il s'ensuit que $h(g(v)) = \lambda g(v)$, $g(v)$ est donc bien élément de V.

Par suite, on montre que $H \subset \mathrm{Z}_G$, le centre de G. Soit $h \in H$, il s'agit de prouver que $ghg^{-1} = h$ pour tout $g \in G$. On introduit pour cela $\varphi : G \to H$, $g \mapsto ghg^{-1}$. Les matrices de $\varphi(H)$ sont simultanément diagonalisables et ont les mêmes valeurs propres (celles de h), elles sont donc en nombre fini. Par ailleurs, H est connexe par dérivation d'un groupe connexe et φ est continue, $\varphi(H)$ est donc connexe. On en déduit que $\varphi(H)$ est réduit à au plus un élément, puis $\varphi(H) = \{\varphi(I_n)\} = \{h\}$, ce qu'il fallait.

Il s'ensuit facilement que les éléments de H sont des homothéties. En effet, soit $h \in H$ et λ une valeur propre de h, alors le sous-espace propre associé est non trivial et stable par G (car $H \subset \mathrm{Z}_G$), c'est donc $\mathbb{C}^n$ en entier, ce qui prouve que h est l'homothétie de rapport λ. De plus, $H \subset \mathrm{D}(G) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (on utilise ici que $m > 1$), donc $\det(h) = \lambda^n = 1$. On en déduit que H est fini (ses éléments sont des homothéties dont les rapports sont des racines n-èmes de l'unité), et comme H est connexe, il est réduit à $\{I_n\}$, ce qui achève la démonstration.

$\square$

Leçons possibles
103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
121 Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.
124 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
125 Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Références
[Pit06] pp. 2-3.
chambi algèbre corporelle