5 Ellipse de Steiner

On admet les deux propriétés suivantes vérifiée par une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F' dans un plan euclidien :

– La tangente en un point M de $\mathcal{E}$ est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$.
– Étant donné un point M de l'ellipse et un point P à l'extérieur de $\mathcal{E}$ tel que la droite (PM) soit tangente à l'ellipse en M, l'autre tangente à l'ellipse passant par P est déterminée par l'égalité des angles $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PF'})$ et $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PM'})$ (où M' est le point de tangence). Il s'agit du lemme de Poncelet.

Évidemment il faudrait faire un dessin.

On admet aussi le théorème de Gauss-Lucas : si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, les racines de P' sont barycentres des racines de P (dans le plan complexe).

Théorème. *Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont les racines z_1, z_2, z_3 sont distinctes. Alors les racines w_1 et w_2 de P' sont les foyers d'une ellipse $\mathcal{E}$ inscrite dans le triangle de sommets z_1, z_2 et z_3, et la tangence a lieu aux milieux des trois côtés.*

Preuve.
On ne perd rien à supposer que P est unitaire, ainsi $P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ et $P' = 3(X - w_1)(X - w_2)$.

En vertu du théorème de Gauss-Lucas, les points w_1 et w_2 sont à l'intérieur du triangle de sommets z_1, z_2 et z_3.

Soit w_1' le symétrique de w_1 par rapport à la droite (z_1, z_2). On définit l'ellipse $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C}, |z - w_1| + |z - w_2| = |w_1' - w_2|\}$.

Soit I l'intersection des droites (w_1', w_2) et (z_1, z_2). Alors $I \in \mathcal{E}$ car $|I - w_1| + |I - w_2| = |I - w_1'| + |I - w_2| = |w_1' - w_2|$. De plus, on voit par construction de w_1' que (z_1, z_2) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{w_1 I w_2}$, si bien que $\mathcal{E}$ et (z_1, z_2) sont tangentes en I.

Montrons maintenant que $\mathcal{E}$ est tangente à la droite (z_1, z_3). D'après le lemme de Poncelet, il suffit que les angles orientés $\widehat{z_2 z_1 w_2}$ et $\widehat{w_1 z_1 z_2}$ sont égaux. Remarquant que $P'(z_1) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = 3(z_1 - w_1)(z_1 - w_2)$, on écrit que $3\dfrac{w_2 - z_1}{z_2 - z_1} = \dfrac{z_3 - z_1}{w_1 - z_1}$, d'où l'égalité des angles en prenant les arguments.

Le même argument montre que $\mathcal{E}$ est tangente à la droite (z_2, z_3).

Il reste juste à montrer que les points de tangence sont les milieux des côtés du triangle. Soit z_{23} le milieu du segment $[z_2, z_3]$. Pour montrer que la tangence a lieu en z_{23}, il suffit de montrer que (z_2, z_3) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{w_1 z_{23} w_2}$ (car on sait déjà que (z_2, z_3) est tangente à l'ellipse). On écrit que $P'(z_{23}) = (z_{23} - z_2)(z_{23} - z_3) = 3(z_{23} - w_1)(z_{23} - w_2)$, d'où $\dfrac{z_3 - z_{23}}{w_1 - z_{23}} = 3\dfrac{w_2 - z_{23}}{z_2 - z_{23}}$, et on a l'égalité des angles voulue en prenant les arguments. Le même raisonnement s'applique aussi bien aux deux autres côtés. Ceci termine la preuve. □

Leçons possibles

118 Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.
136 Coniques. Applications.
139 Applications des nombres complexes à la géométrie.
144 Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.
140 Angles : Définitions et utilisation en géométrie.

Références

?