6 Prolongement des identités algébriques

THÉORÈME. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in k[X_1, ..., X_n]$ où k est un corps. Si P s'annule sur $S_1 \times ... \times S_n$, où les S_i sont des parties infinies de k, alors P est le polynôme nul.*

Preuve.
On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, le résultat est connu : un polynôme à une indéterminée à coefficients dans un corps ayant une infinité de zéros est le polynôme nul.

Supposons le résultat acquis pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P \in k[X_1, ...X_{n+1}]$ un polynôme s'annulant sur $S_1 \times ... \times S_{n+1}$, où chaque S_i est une partie infinie de k.

Fixons $(x_1, ..., x_n) \in S_1 \times ... \times S_n$. Le polynôme $P(x_1, ..., x_n, X_{n+1})$ est un polynôme à une indéterminée à coefficients dans k s'annulant sur l'ensemble infini S_{n+1}, c'est donc le polynôme nul. En écrivant $P = \sum_{j \geqslant 0} P_j X^j \in k[X_1, ..., X_n][X_{n+1}]$, on a donc $P_j(x_1, ..., x_n) = 0$ pour tout j.

En faisant varier $(x_1, ..., x_n)$ dans $S_1 \times ... \times S_n$ et en appliquant le même raisonnement, on voit que chaque polynôme $P_j \in k[X_1, ..., X_n]$ s'annule sur $S_1 \times ... \times S_n$. Par hypothèse de récurrence, on a $P_j = 0$ pour tout j, ce qui prouve que P est le polynôme nul.

□

Une conséquence immédiate de ce théorème est que l'on peut identifier polynômes et fonctions polynômiales de plusieurs variables dans le cas où k est un corps infini. Plus précisément, on a un morphisme injectif d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, ..., X_n] & \to & k^{k^n} \\ P & \mapsto & (x_1, ..., x_n) \mapsto P(x_1, ..., x_n) \end{array}$$

Donnons une autre application directe, dont une conséquence est le théorème de l'élément primitif (cf. développement 15).

Proposition. *Soit k un corps infini et E un espace vectoriel sur k. Alors E n'est pas réunion finie de sous-espaces stricts.*

Preuve.
Il suffit de montrer que si H_1, ..., H_p sont des hyperplans de $E \simeq k^n$, alors $\bigcup_{i=1}^p H_i \neq E$.

Soit l_i la forme linéaire non nulle associée à H_i, c'est un élément non nul de $k[X_1, ..., X_n]$. Si $\bigcup_{i=1}^p H_i = E$, le polynôme $\prod_i l_i$ s'annule sur E, c'est donc le polynôme nul. Il s'ensuit que l'une des formes linéaires l_i est nulle (par intégrité de $k[X_1, ..., X_n]$), contrairement à l'hypothèse.

□

On peut encore citer ces deux applications immédiates, dont je laisse la démonstration :

Proposition. *Soit $P \in k[X_1, ..., X_n]$ avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si P s'annule sur un ouvert de k^n, il est le polynôme nul.*

Proposition. *Soit P un polynôme non nul de $k[X_1, ..., X_n]$ avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors l'ensemble $\{P \neq 0\} \subset k^n$ est un ouvert dense de k^n.*

Le corollaire suivant, bien qu'immédiat, est crucial (il exprime la densité des ouverts non vides pour la topologie de ZARISKI) :

Corollaire. *Soient k un corps infini et Q un polynôme non nul $\in k[X_1, ..., X_n]$. Si $P \in k[X_1, ..., X_n]$ s'annule sur la partie $\{Q \neq 0\}$ de k^n, alors il est le polynôme nul.*

Preuve.
On a $P(x)Q(x) = 0$ pour tout $x \in k^n$. D'après le théorème, PQ est le polynôme nul. $k[X_1, ..., X_n]$ étant un anneau intègre et Q n'étant pas le polynôme nul, on en déduit que $P = 0$.

□

Comme application de ce corollaire, on peut montrer le théorème de CAYLEY-HAMILTON :

THÉORÈME (CAYLEY-HAMILTON). *Soit A un anneau commutatif unitaire et $M \in \mathcal{M}_n(A)$. Alors M est annulée par son polynôme caractéristique χ_M.*

Preuve.
On commence par le cas où A est un corps infini. L'idée est d'utiliser la « densité » des matrices diagonalisables. Chaque coefficient de la matrice $\chi_M(M)$ est une fonction polynômiale en les n^2 coefficients de M. En vertu du corollaire précédent, il suffit de montrer que celle-ci s'annule sur un ensemble $\{Q \neq 0\}$, où Q est un polynôme non nul en n^2 variables.

On choisit pour Q la fonction $M \mapsto \mathrm{Disc}(\chi_M)$, qui est bien polynômiale en les n^2 coefficients de M, et non nulle. Plus précisément, les points où Q ne s'annule pas sont exactement les matrices dont toutes les valeurs propres dans une clôture algébrique $\bar{A}$ de A sont distinctes. De telles matrices sont diagonalisables dans $\bar{A}$, et dans ce cas il est clair que $\chi_M(M) = 0$. Ceci prouve le théorème de CAYLEY-HAMILTON dans le cas où A est un corps infini.

La preuve se généralise immédiatement à tout anneau commutatif unitaire. En effet, chaque coefficient de la matrice $\chi_M(M)$ s'exprime comme un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de M. Ces polynômes sont nuls car la preuve a été faite sur $\mathbb{Q}$, le résultat reste donc vrai sur $\mathbb{Z}$ et par suite sur tout anneau commutatif unitaire.

□

Leçons possibles
117 Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geqslant 2$). Polynômes symétriques. Applications.
123 Déterminant. Exemples et applications.
126 Endomorphismes diagonalisables.
129 Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.

Références
Un cours d'agrégation de David Bourqui.