9 Automorphismes de $k(X)$

Théorème. *Soit k un corps. Les automorphismes d'algèbre de $k(X)$ sont exactement les $F \mapsto F\left(\dfrac{aX+b}{cX+d}\right)$, où $a,\ b,\ c,\ d \in k$ et $ad-bc \neq 0$.*

Preuve.
Soit $\Phi : \mathrm{GL}_2(k) \to \mathrm{Gal}(k(X) : k)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto F\left(\dfrac{aX+b}{cX+d}\right)$. On vérifie immédiatement que Φ est bien à valeurs dans l'ensemble des k-automorphismes de $k(X)$, qui est aussi l'ensemble des automorphismes d'algèbre de $k(X)$. De même, il est facile de voir que Φ est un morphisme de groupes. Le but est donc de montrer que Φ est surjectif.

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(k(X) : k)$, notons $F \in k(X)$ l'image de X par σ. L'image de σ est $k(F)$, par surjectivité de σ on a $k(F) = k(X)$. En particulier $X \in k(F)$. Son polynôme minimal sur $k(F)$ est donc de degré 1. Par ailleurs, si on écrit $F = \dfrac{P}{Q}$ avec P et Q premiers entre eux alors le polynôme (en T et à coefficients dans $k(F)$) $\pi(T) = P(T) - FQ(T)$ annule X. Si on montre que π est irréductible sur $k(F)$, il sera donc de degré 1. Comme les coefficients dominants de $P(T)$ et $FQ(T)$ sont distincts (car F n'est pas dans k), on aura que P et Q sont des polynômes non proportionnels de degré 1, et le théorème sera montré.

Comme F est transcendant sur k, F peut être vu comme une indéterminée. Pour montrer que $P(T) - FQ(T)$ est un irréductible de $k(F)[T]$, il suffit de montrer que c'est un irréductible $k[F][T] \approx k[F,T] \approx k[T][F]$. Comme $P(T) - FQ(T)$ est un polynôme de $(k[T])[F]$ de degré 1 et de contenu 1, il est bien irréductible.

Au passage, on a immédiatement que $\mathrm{Ker}(\Phi) = k^* I_2$, si bien que $\mathrm{Gal}(k(X) : k) \approx \mathrm{PGL}_2(k)$.
$\square$

Leçons possibles
115 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
116 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Références
Francinou ?