11 Comptage de racines et formes quadratiques

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. On note α_1, ..., α_n ses racines complexes (comptées avec multiplicité). On note $s_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$). Les s_i sont réels car ce sont des fonctions symétriques des racines. Ainsi on peut les calculer de manière explicite (en fonction des coefficients de P), par exemple avec les formules de Newton.

Théorème. *Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $q(u) = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} s_{i+j} u_i u_j$ où $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Soit (s,t) la signature de q. Le nombre de racines réelles distinctes de q est $s-t$, tandis que le nombre de racines complexes distinctes est $s+t$ (i.e. le rang de q).*

Preuve.
On écrit $q(u) = \sum_{i,j} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{i+j} u_i u_j$ soit $q(u) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j} \alpha_k^{i+j} u_i u_j$, soit encore $q(u) = \sum_{k=1}^{n} l_k(u)^2$ où $l_k(u) = \sum_{i=0}^{n-1} {\alpha_k}^i u_i$. Quitte à réordonner, on peut supposer que α_1, ..., α_r sont les racines complexes distinctes de P, avec des multiplicités respectives m_1, ..., m_r, ainsi $q = \sum_{k=1}^{r} m_k l_k^2 = \sum_{k=1}^{r} (\sqrt{m_k} l_k)^2$.

On a donc obtenu une décomposition sur $\mathbb{C}$ de q en somme de carrés de formes linéaires, de plus ces formes linéaires sont linéairement indépendantes car le déterminant des vecteurs de leurs r premières coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n*}$) est un facteur près le déterminant de Van der Monde associé aux scalaires distincts α_1, ..., α_r.

Ainsi le rang de q sur $\mathbb{C}$ est r, c'est donc aussi son rang sur $\mathbb{R}$ (le rang d'une matrice ne dépend pas du corps de base, car il correspond à l'annulation d'un déterminant extrait). On a déjà la deuxième affirmation du théorème.

Maintenant, si l_k correspond à un α_k non réel, alors $\bar{l_k}$ correspond à $\bar{\alpha_k}$ qui a la même multiplicité m_k que α_k. Si on note $v_k = \frac{l_k + \bar{l_k}}{2}$ et $w_k = \frac{l_k - \bar{l_k}}{2i}$, alors les coefficients de v_k et w_k sont réels, et $m_k({l_k}^2 + \bar{l_k}^2) = 2m_k({v_k}^2 - {w_k}^2)$.

Ainsi, si α_1, ..., α_p sont les racines réelles distinctes de q et α_{p+1}, $\bar{\alpha_{p+1}}$, ..., α_{p+c}, $\bar{\alpha_{p+c}}$ ses racines complexes distinctes (avec $r = p+2c$), il vient $q = \sum_{k=1}^{p} m_k {l_k}^2 + \sum_{k=p+1}^{p+c} 2m_k({v_k}^2 - {w_k}^2)$. Ceci donne une décomposition de q sur $\mathbb{R}$ en somme de carrés de formes linéaires (réelles) qui sont linéairement indépendantes (on voit immédiatement que si elles étaient $\mathbb{R}$-liées, alors les l_k seraient $\mathbb{C}$-liées). La signature de q est donc $(p+c, c)$, d'où la première assertion du théorème.

□

Leçons possibles
118 Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.
131 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
(**132** Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.)
145 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Références
gantmacher matrices t2 p199