14 Matrices bistochastiques

Définition. *Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle est à coefficients positifs et si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$.*

On dit que M est bistochastique (ou doublement stochastique) lorsque M et ${}^tM$ sont stochastiques.

Remarques.
- Une matrice M est stochastique si et seulement si $M \geqslant 0$ et $Mu = u$, où on a noté u le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont 1.
- Si M est stochastique, alors $\|M\|_\infty = 1$ et $\rho(M) = 1$.
- L'ensemble des matrices stochastiques $\mathcal{S}$ est convexe et compact, ainsi que l'ensemble des matrices $\mathcal{B}$ des matrices bistochastiques.
- Les matrices de permutations sont bistochastiques.

Théorème (Birkhoff). *L'ensemble des matrices bistochastiques $\mathcal{B}$ est l'enveloppe convexe dans $M_n(\mathbb{R})$ de l'ensemble des matrices de permutations.*

Autrement dit, une matrice est bistochastique si et seulement si elle est barycentre de matrices de permutations.

Preuve.
Celle-ci repose sur le théorème de Krein-Milman, qui dit qu'un convexe compact d'un espace de dimension finie est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

$\mathcal{B}$ étant convexe et compact (dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$), il nous faut donc montrer que les matrices de permutations sont exactement les points extrémaux de $\mathcal{B}$. Rappelons qu'un point x d'un convexe $\mathcal{C}$ est extrémal s'il n'est à l'intérieur d'aucun segment de $\mathcal{C}$.

Il est clair que les matrices de permutations sont des points extrémaux de $\mathcal{B}$. Supposons en effet que l'on ait $P = \lambda M + (1-\lambda)N$, où P est une matrice de permutation, M, N sont éléments de $\mathcal{B}$ et $\lambda \in]0,1[$. Les matrices M et N étant à coefficients positifs, si $p_{ij} = 0$ on doit avoir $m_{ij} = n_{ij} = 0$. De même, les coefficients de M et N étant $\leqslant 1$, si $p_{ij} = 1$ on doit avoir $m_{ij} = n_{ij} = 1$. On en déduit que $M = N = P$, ce qui prouve que P est un point extrémal de $\mathcal{B}$.

Soit maintenant $M \in \mathcal{B}$ qui n'est pas une matrice de permutation. Il nous reste à montrer que M n'est pas un point extrémal de $\mathcal{B}$.

M n'étant pas une matrice de permutation, il existe un coefficient $m_{i_1 j_1} \in]0,1[$. Comme M est stochastique, il existe un indice j_2 tel que $m_{i_1 j_2} \in]0,1[$. De même, ${}^tM$ étant stochastique, il existe un indice i_2 tel que $m_{i_2 j_2} \in]0,1[$. On construit ainsi par récurrence une suite $(j_1, i_1, j_2, i_2, ...)$ telle que les coefficients $m_{i_k j_k}$ et $m_{i_k j_{k+1}}$ sont éléments de $]0,1[$. L'ensemble des indices étant fini, il arrive un moment où l'un des indices, de ligne ou de colonne, est répété.

On peut donc supposer que la suite $(i_1, j_1, i_2, ..., j_{r+1} = j_1)$ vérifie la propriété précédente, quitte à avoir commencé par le premier indice qui se répète. On construit alors une matrice B en posant $b_{i_k j_k} = 1$, $b_{i_k j_{k+1}} = -1$ (pour $1 \leqslant k \leqslant r$), $b_{ij} = 0$ sinon. Par construction, on a $Bu = 0$ et ${}^t Bu = 0$. On en déduit que si $\alpha > 0$, les matrices $M + \alpha B$ et $M - \alpha B$ sont bistochastiques. De plus, on peut choisir α assez petit pour que ces matrices soient à coefficients $\geqslant 0$. Comme M est le milieu du segment $[M + \alpha B, M - \alpha B]$, il s'ensuit que M n'est pas un point extrémal de $\mathcal{B}$.

□

Corollaire. *Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ invariante par permutation des coordonnées. Alors $\|M\| = 1$ pour toute matrice bistochastique M.*

Preuve.
Par hypothèse, $\|P\| = 1$ pour toute matrice de permutation P. On en déduit que $\|M\| \leqslant 1$ pour toute matrice bistochastique M grâce au théorème précédent (par convexité de la norme subordonnée). Comme $Mu = u$, on a en fait $\|M\| = 1$. □

Leçons possibles
(**105** Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.)
137 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

Références
[Ser01] pp. 59-60.