17 Groupes finis de déplacements de l'espace

THÉORÈME. *Tout groupe fini de déplacements de l'espace s'identifie à un sous-groupe de SO(3) (et réciproquement) ; il est de l'un des cinq types suivants :*
- *Le groupe cyclique (isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) engendré par une rotation axiale d'angle $2\pi/n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) ;*
- *Le groupe diédral direct spatial d'un polygone régulier engendré par deux retournements d'axes concourant selon un angle de π/n (où $n > 1$), isomorphe à D_n ;*
- *Le groupe isomorphe à $\mathcal{A}_4$ des isométries d'un tétraèdre régulier ;*
- *Le groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ des rotations d'un cube ou d'un octaèdre régulier ;*
- *Le groupe isomorphe à $\mathcal{A}_5$ des rotations d'un dodécaèdre régulier ou d'un icosaèdre régulier.*

Preuve.
Soit G un tel groupe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. L'orbite d'un point A est finie et son isobarycentre Ω est conservé par tous les éléments de G. Quitte à conjuguer G par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$, on peut donc supposer que $G \subset \mathrm{SO}(3)$.

Un élément non trivial $g \in G$ est donc une rotation dont l'axe coupe la sphère unité en deux points P et $-P$, appelés pôles de g. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles des éléments non triviaux de G. Le groupe G agit sur $\mathcal{P}$ par restriction. En effet, si P est un pôle de $g \in G \setminus \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\}$, alors $h(P)$ est un pôle de la rotation $hgh^{-1} \in G$: il suffit d'écrire que $hgh^{-1}(h(P)) = hg(P) = h(P)$ puisque $g(P) = P$.

On note C_1, C_2, ..., C_k les orbites de $\mathcal{P}$ et p_i le cardinal du stabilisateur d'un élément de C_i, de sorte que $\#C_i = n/p_i$. A chaque couple $(P, -P)$ d'éléments de $\mathcal{P}$ tel que $P \in C_i$, on peut associer de manière unique $p_i - 1$ rotations non triviales de G. En comptant de la sorte les éléments de $G \setminus \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\}$, on en déduit que $n - 1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(p_i - 1)\#C_i$, soit encore $2 - \dfrac{2}{n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$. Comme $n \geqslant 2$, on a $1 \leqslant 2 - 2/n < 2$. D'autre part, on a $1/2 \leqslant 1 - 1/p_i < 1$ pour chaque i (car $p_i \geqslant 2$) ; on en déduit que l'on a nécessairement $k = 2$ ou 3.

Si $k = 2$, l'équation précédente s'écrit $2/n = 1/p_1 + 1/p_2$ soit encore $2 = \#C_1 + \#C_2$, on a nécessairement $\#C_1 = \#C_2 = 1$. Il y a donc seulement deux pôles opposés, on en déduit que G est le groupe cyclique engendré par une rotation d'axe passant par ces pôles et d'angle $2\pi/n$, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Si $k = 3$, on a nécessairement $n \geqslant 3$ et l'équation précédente se réécrit $1 + 2/n = 1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3$. On peut supposer $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3$. Comme $1 + 2/n > 1$, on a nécessairement $p_3 = 2$. L'équation s'écrit alors $1/2 + 2/n = 1/p_1 + 1/p_2$. De nouveau, comme

$1/2 + 2/n > 1/2$, on doit avoir $p_2 = 2$ ou $p_2 = 3$. Examinons les différents cas :

- Si $p_2 = 2$, l'équation s'écrit $2/n = 1/p_1$, soit $n = 2p_1$. Par conséquent, n est pair et le stabilisateur G_1 des deux éléments $\{P_1, -P_1\}$ de C_1 est un sous-groupe de G d'indice 2, isomorphe à $\mathbb{Z}/(n/2)\mathbb{Z}$. Celui-ci agit transitivement sur les $n/2$ pôles de C_2 (ainsi que sur les $n/2$ pôles de C_3), tous contenus dans le plan médiateur de $\{P_1, -P_1\}$. Les éléments de C_2 sont les sommets d'un polygone régulier à $n/2$ côtés, dont le groupe des rotations s'identifie à G_1 et les symétries à la classe ne contenant pas $\{\mathrm{id}\}$ de G/G_1. Par conséquent, G est le groupe diédral spatial direct de ce polygone, isomorphe à D_n.

- Si $p_2 = 3$, l'équation s'écrit $1/p_1 = 1/6 + 2/n$. On en déduit que $3 \leqslant p_1 < 6$. On étudie ces trois sous-cas :
  - Si $p_1 = 3$, on a $n = 12$. G agit sur l'orbite C_1 qui a 4 éléments. Cette action est fidèle car seul $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ stabilise > 2 points. G s'identifie donc à un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$; finalement $G \approx \mathcal{A}_4$.

  - Si $p_1 = 4$, $n = 24$. L'orbite C_2 a 8 éléments. Tous les pôles d'ordre 3 (*i.e.* dont le stabilisateur est d'ordre 3) sont dans la même orbite. On en déduit que C_2 contient 4 pôles et leurs opposés (car un pôle et son opposé ont même ordre), notons-les P_1, $-P_1$, ..., P_4, $-P_4$. G agit sur ces couples de pôles (car une isométrie envoie deux point antipodaux sur deux points antipodaux). De plus, cette action est encore fidèle. En effet, si un élément non trivial $g \in G$ fixe les 4 couples de pôles, au moins trois couples sont « inversés », par exemple $\{P_1, -P_1\}$, $\{P_2, -P_2\}$, $\{P_3, -P_3\}$. Si P_1, P_2, P_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, on doit avoir $g = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$: ce cas est exclu. Sinon, tous ces points sont dans un même plan. Mais un un élément du stabilisateur de P_1 d'ordre 3 envoie P_2 sur deux points n'appartenant pas au plan et non antipodaux, et seuls P_4 et $-P_4$ sont des points de C_2 qui ne sont (peut-être) pas dans notre plan : c'est absurde. Finalement, G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$, pour des raisons de cardinal $G \approx \mathfrak{S}_4$.

  - Le cas $p_1 = 5$, $n = 60$ est admis. Une manière de le traiter serait de montrer que C_1 est un dodécaèdre régulier et que G s'identifie au groupe des rotations de ce dodécaèdre.

□

Leçons possibles
101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
104 Groupes finis. Exemples et applications.
105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
107 Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$, de $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$. Applications.
133 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Références
[Lad03] pp377 et suivantes.