19 Théorème de Burnside

Lemme. *Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si tr$(N^k) = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Preuve.
Si N est nilpotente, toutes ses valeurs propres sont nulles ainsi que celles de ses itérées successives, d'où le résultat.

Réciproquement, si $\mathrm{tr} N^k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, les valeurs propres non nulles λ_1, ..., λ_r de N de multiplicités respectives α_1, ..., α_r vérifient $\alpha_1 \lambda_1^k + ... + \alpha_r \lambda_r^k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$. Si $r \geqslant 1$, le vecteur $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ est donc un zéro non trivial de la matrice $\Lambda = (\lambda_j^i)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ dont le déterminant se ramène immédiatement à un déterminant de Van der Monde par multilinéarité : $\det \Lambda = \lambda_1 ... \lambda_r \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (\lambda_j - \lambda_i)$. Ce déterminant étant non nul, on aboutit à une contradiction. On doit donc en déduire que $r = 0$, autrement dit N est nilpotente.

□

Théorème (Burnside). *Un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{C})$ est d'exposant fini si et seulement si il est fini.*

Preuve.
Si G est fini, il est évidemment d'exposant fini (c'est une conséquence, par exemple, du théorème de Lagrange).

Réciproquement, supposons que G ait un exposant fini $e \in \mathbb{N}^*$. Soit $(C_1, ..., C_r)$ une famille d'éléments de G génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G (on pourra remarquer qu'il s'agit en fait d'une sous-algèbre). On définit $\tau : G \to \mathbb{C}^r$ par $\tau(A) = (\mathrm{tr} AC_1, ..., \mathrm{tr} AC_r)$. Nous allons montrer que l'application τ est injective : soient A, $B \in G$ telles que $\tau(A) = \tau(B)$.

On a alors $\mathrm{tr} AM = \mathrm{tr} BM$ pour tout $M \in G$ par linéarité de la trace, puisque les C_i engendrent un sous-espace contenant G. On en déduit que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(AB^{-1})^{k+1} = \mathrm{tr} A[B^{-1}(AB^{-1})^k] = \mathrm{tr} B[B^{-1}(AB^{-1})^k]$ soit $\mathrm{tr}(AB^{-1})^{k+1} = \mathrm{tr}(AB^{-1})^k$, il s'ensuit par une récurrence immédiate que $\mathrm{tr}(AB^{-1})^k = \mathrm{tr} I_n = n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Notons $N = AB^{-1} - I_n$. N est diagonalisable car elle est annulée par le polynôme scindé à racines simples $(X+1)^e - 1$ (puisque $(AB^{-1})^e = I_n$). De plus, on a pour $1 \leqslant k \leqslant n$ par la formule du binôme $N^k = \sum_{j=0}^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (AB^{-1})^j (-1)^{k-j}$, d'où on déduit que $\mathrm{tr} N^k = n \sum_{j=0}^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (-1)^{k-j} = n(1-1)^k$ soit $\mathrm{tr} N^k = 0$. D'après le lemme, il s'ensuit que N est nilpotente. Étant diagonalisable et nilpotente, N est la matrice nulle, ce qui revient à dire que $A = B$. Ceci prouve que τ est injective.

Les matrices de G étant annulées par le polynôme $X^e - 1$, leurs valeurs propres sont des racines e-èmes de l'unité. Les traces des éléments de G ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs. On en déduit que l'image de τ est finie, mais τ étant injective, cela entraîne que G est fini.

$\square$

Leçons possibles
104 Groupes finis. Exemples et applications.
129 Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.
128 Endomorphismes nilpotents.
106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Références
[Ale99]