21 Décomposition de Dunford effective

Théorème. *Soit k un corps parfait et f un endomorphisme d'un k-espace vectoriel de dimension finie. Il existe alors d, $n \in k[f]$ tels que $f = d + n$, avec d semi-simple et n nilpotent. De plus, cette décomposition est effective lorsque k est de caractéristique* 0.

Il n'est pas dur de montrer qu'un tel couple est unique, en supposant simplement que $f = d + n$, avec d et n qui commutent, d semi-simple et n nilpotent. On insiste plutôt ici sur l'aspect effectif d'une telle décomposition, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme permettant de la calculer (en un nombre fini d'étapes).

Preuve.
Soit P un polynôme non nul annulateur de f (par exemple son polynôme caractéristique). On écrit la décomposition de P en irréductibles : $P = {P_1}^{\alpha_1} \ldots {P_r}^{\alpha_r}$. Notons $Q = P_1 \ldots P_r$. Q peut être calculé de manière effective si k est de caractéristique 0 car dans ce cas $P = \text{pgcd}(P, P')Q$. En effet, $P' = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i {P_i}' {P_i}^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} {P_j}^{\alpha_j}$. Il est clair que $\forall i$ ${P_i}^{\alpha_i - 1}$ divise P', en revanche ${P_i}^{\alpha_i}$ ne divise pas P', car il divise tous les termes de la somme sauf le terme i (car on aurait alors $P_i | \alpha_i {P_i}'$, et $\alpha_i \neq 0$ dans k).

Soit $A = k[X]/(P)$, on note x la classe de X. Comme P annule f, on a un morphisme $\varphi : A \to k[f]$, $x \mapsto f$. Ainsi, si on trouve une décomposition $x = u + v$ avec $Q(u) = 0$ et v nilpotent dans A, alors $d = \varphi(u)$ et $n = \varphi(v)$ conviennent (d sera semi-simple car toujours annulé par Q, qui est sans facteurs carrés, et n sera toujours nilpotent). Notons que $P | Q^{\text{ppcm}(\alpha_i)}$, ainsi $Q(x)$ est nilpotent dans A.

Nous allons obtenir u grâce à la méthode de Newton : on construit la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $x_0 = x$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{Q(x_n)}{Q'(x_n)}$. Nous allons montrer par récurrence que $Q'(x_n)$ est inversible dans A (ainsi la suite est bien définie), et $Q(x_n) \in \left(Q(x)^{2^n}\right)$. Supposons un instant ceci démontré, alors la suite stationne (rapidement) car $Q(x)$ est nilpotent dans A. Soit u sa limite et posons $v = x - u$. Alors $Q(u) = 0$ et $v = \sum_{n \geqslant 0} x_{n+1} - x_n$ (la somme est finie) est nilpotent comme somme de nilpotents. Le théorème sera donc prouvé.

Initialisons la récurrence : d'une part il est clair que $Q(x_0) = Q(x) \in \left(Q(x)^{2^0}\right)$. D'autre part, Q' est premier avec P : on écrit $Q' = \sum_{i=1}^{r} {P_i}' \prod_{j \neq i} P_j$. $\forall i$, P_i ne divise pas Q' car il divise tous les termes de la somme sauf le terme i (sinon on aurait $P_i | {P_i}'$, ce qui est exclu car k est parfait). Il s'ensuit que $Q'(x)$ est inversible dans A (cela se voit en écrivant que $Q(X)U(X) + P(X)V(X) = 1$, ainsi $U(x)$ est l'inverse de $Q(x)$ dans A).

Vérifions maintenant l'hérédité de nos propriétés. Il est clair que $Q'(x_{n+1}) - Q'(x_n) \in (x_{n+1} - x_n)$. Or $(x_{n+1} - x_n) = (Q(x_n)) \subset \left(Q(x)^{2^n}\right)$, ainsi $Q'(x_{n+1})$ est inversible comme somme d'un inversible et d'un nilpotent. Enfin, la formule de Taylor donne $Q(x_{n+1}) = Q(x_n) - Q'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+1} - x_n)^2 a$, où $a \in A$.

Sachant que $x_{n+1} - x_n = \frac{Q(x_n)}{Q'(x_n)}$, il vient $Q(x_{n+1}) = 0 + Q(x_n)^2 \frac{a}{Q'(x_n)}$, ce qui prouve que $Q(x_{n+1}) \in \left(Q(x_n)^2\right) \subset \left(Q(x)^{2^{n+1}}\right)$.

$\square$

Leçons possibles

111 Exemples d'applications des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.
(**146** Anneaux principaux.)
116 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
124 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
(**125** Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.)
126 Endomorphismes diagonalisables.
128 Endomorphismes nilpotents.
129 Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.

Références