22 Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré

On étudie le groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$ et son action sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im} z > 0\}$.

L'opération par homographies

Rappelons que le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\{-I_2, I_2\}$ agit fidèlement transitivement sur le la droite projective complexe $\mathrm{P}^1\mathbb{C}$, ses éléments sont appelés homographies.

On montre que l'opération de la classe d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ prend l'expression suivante : $\overline{A} \star z = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où la fonction $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ a été prolongée en une fonction continue $\mathrm{P}^1\mathbb{C} \to \mathrm{P}^1\mathbb{C}$.

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ (grâce à l'isomorphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \approx \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$), il agit donc sur $\mathrm{P}^1\mathbb{C}$ par restriction.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Im} \overline{A} \star z = \mathrm{Im} \dfrac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2} \mathrm{Im} z$ soit $\mathrm{Im} \overline{A} \star z = \dfrac{\mathrm{Im} z}{|cz+d|^2}$. Ceci prouve que $\mathbb{H}$ est stable sous l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Enfin, l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ reste fidèle : $\overline{A} \star z = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$, si cette égalité est vérifiée pour tout $z \in \mathbb{H}$ (qui est infini) cela impose $c = b = 0$ et $a = d$, et $\det A = 1$ entraîne $A = \pm I_2$ d'où $\overline{A} = \mathrm{id}$.

Un domaine fondamental de l'action

Notons $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H}, |\mathrm{Re} z| \leqslant 1/2 \text{ et } |z| \geqslant 1\}$. Nous allons montrer que $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental de l'action du groupe modulaire sur $\mathbb{H}$, c'est-à-dire que :
– toute orbite rencontre $\mathcal{D}$ en un ou deux points,
– si deux points de $\mathcal{D}$ sont dans une même orbite, alors ils sont sur la frontière de $\mathcal{D}$.

Nous allons voir que les matrices $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jouent un rôle particulier. Remarquons d'emblée que $\overline{T} \star z = z + 1$ et $\overline{S} \star z = -1/z$.

Fixons $z \in \mathbb{H}$. On cherche un point de partie imaginaire maximale dans l'orbite de z. Pour cela, on remarque que les parties imaginaires des points de $\mathcal{O}_z$ qui sont $\geqslant$ à celle de z forment un ensemble fini. En effet, $\mathrm{Im}\overline{A} \star z \geqslant \mathrm{Im}z \Leftrightarrow |cz + d| \leqslant 1$, et seul un nombre fini de couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ satisfont cette inégalité (pour le voir, on écrit que $|c|\mathrm{Im}z = |\mathrm{Im}(cz + d)| \leqslant 1$ impose que c soit borné, d'où on déduit sans mal que d est aussi borné). Comme $\mathrm{Im}\overline{A}\star z$ ne dépend que de c et d, notre affirmation s'en ensuit.

Soit donc $z_1 \in \mathcal{O}_z$ de partie imaginaire maximale. Quitte à translater z_1 grâce à T^n (où n est un élément de $\mathbb{Z}$ tel que $-1/2 \leqslant \mathrm{Re}z_1 + n \leqslant 1/2$), on peut supposer que $|\mathrm{Re}z_1| \leqslant 1/2$. De plus, on sait que $\mathrm{Im}\overline{S} \star z_1 \leqslant \mathrm{Im}z_1$ où $\mathrm{Im}\overline{S} \star z_1 = \dfrac{\mathrm{Im}z_1}{|z_1|^2}$, on en déduit que $|z_1| \geqslant 1$, et par suite $z_1 \in \mathcal{D}$. On a donc montré que chaque orbite rencontre $\mathcal{D}$.

Supposons maintenant que deux points z et z' de $\mathcal{D}$ soient dans une même orbite. On peut supposer que $\mathrm{Im}z' \geqslant \mathrm{Im}z$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $z' = \overline{A} \star z$. Conformément à ce qui a été écrit ci-dessus, on a alors $|c|\mathrm{Im}z \leqslant 1$ avec $\mathrm{Im}z > \sqrt{3}/2$ (car $z \in \mathcal{D}$), d'où on déduit que $|c| < 2$. Étudions les différents cas :

- Si $c = 0$, on a $\det A = ad = 1$, quitte à changer A en $-A$ on peut supposer $a = d = 1$. On a alors $z' = z + b$. Quitte à échanger les rôles de z et z' (ce qui n'a pas été fixé plus haut puisqu'ils ont même partie imaginaire), on peut supposer $b \geqslant 0$. Il est clair que l'on a alors nécessairement $b = 0$ (donc $A = I_2$) et $z' = z$ ou bien $b = 1$ et $\mathrm{Re}z = -1/2$. Dans ce dernier cas, z et z' sont sur la frontière de $\mathcal{D}$, de plus z' (ainsi que $\overline{A}$) est entièrement déterminé : il n'y a pas d'autres points de $\mathcal{D}$ dans l'orbite de z et z'.

- Si $c = 1$ (ce qui traite également le cas $c = -1$ quitte à changer A en $-A$), la condition $|z + d| \leqslant 1$ impose $d = 0$ et $|z| = 1$, $z = j$ et $d = -1$, ou $z = -1/j$ et $d = 1$ (faire un dessin). On distingue ces différents sous-cas :

  - Si $d = 0$, alors $b = -\det A = -1$ et $z' = a - 1/z$. $-1/z$ étant le symétrique de z par rapport à l'axe des imaginaires purs, cette situation n'est possible que si $a = 0$, ou $a = 1$ et $z = -1/j$, ou $a = -1$ et $z = j$. Ici aussi, dans chaque cas z et

z' sont sur la frontière de $\mathcal{D}$ et z' est entièrement déterminé par z : aucun autre point de l'orbite de z ne rencontre $\mathcal{D}$.

- Si $z = j$ et $d = 1$, on a alors $\det A = a - b = 1$, d'où on déduit que $z' = a + j$. Ceci n'est possible que si $a = 0$ ou $a = 1$. De nouveau, dans ces deux cas z et z' sont sur la frontière et aucun autre point de l'orbite de z ne rencontre $\mathcal{D}$.

- Si $z = -1/j$ et $d = -1$, la discussion est analogue.

Ceci termine la preuve que $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental de l'action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré. On peut remarquer que pour obtenir une transversale « sympathique », il suffit d'enlever à $\mathcal{D}$ la droite $\mathrm{Re} z = 1/2$ et l'arc de cercle $\{e^{i\theta}, \pi/3 \leqslant \theta < \pi/2\}$.

S et T engendrent $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$

Quitte à modifier légèrement le début du paragraphe précédent en prenant z_1 de partie imaginaire maximale dans l'orbite de z sous l'action du sous-groupe G engendré par S et T, on voit que $\mathcal{D}$ contient au moins un point de chaque orbite de cette action (induite) de G sur $\mathbb{H}$.

Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on fixe $z \in \mathring{D}$ (par exemple $z = i$). Notons $z' = \overline{A} \star z$, il existe donc une matrice B de G telle que $\overline{B} \star z' \in \mathcal{D}$. Mais $\mathcal{D}$ étant un domaine fondamental de l'action du groupe modulaire sur $\mathbb{H}$, cela entraîne que $\overline{B} \star z' = z$, soit encore $\overline{BA} \star z = z$. L'étude menée au paragraphe précédent montre que l'on a de plus $BA = \pm I_2$, il s'ensuit que $A = \pm B^{-1}$. En remarquant que $S^2 = -I_2 \in G$, on en déduit que $A \in G$, si bien que $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Leçons possibles
108 Exemples de parties génératrices d'un groupe.
103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
102 Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux. Exemples.
101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
138 Homographies de la droite complexe. Applications.
139 Applications des nombres complexes à la géométrie.
141 Utilisation des groupes en géométrie.

142 Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.

Références
[Ale99] pp.81 et suivantes.