# 23 Groupes d'ordre 8

**Proposition.** *Les groupes d'ordre* 8*, à isomorphisme près, sont exactement* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$*,* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$*,* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$*,* $D_4$ *et* $\mathbb{H}_8$*.*

*Preuve.*
Soit $G$ un groupe d'ordre 8. Soit $r$ le maximum des ordres des éléments de $G$.

Si $r = 8$, il existe un élément d'ordre 8 donc $G \approx \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Si $r = 2$, alors $G$ est abélien. En effet, soient $x$ , $y \in G$, alors $xy$ est d'ordre (au plus) 2. On en déduit que $xyxy = 1$, soit encore $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ (tout élément de $G$ est son propre inverse). Par suite, $G$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$, de dimension 3 pour des raisons de cardinal. $G$ est donc isomorphe à $\mathbb{F}_2^3$ en tant que $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel et en particulier en tant que groupe.

Supposons maintenant que $r = 4$. Notons $i$ un élément d'ordre 4 et $H = \langle i \rangle$. $H$ est d'indice 2 dans $G$ donc c'est un sous-groupe distingué. Rappelons rapidement pourquoi : soit $x \in G$ il s'agit de montrer que $xH = Hx$. Si $x \in H$, c'est évident. Sinon, on écrit la partition de $G$ en classes à droite $G = H \sqcup xH$ (union disjointe) et en classes à gauche $G = H \sqcup Hx$, qui montre que $xH = Hx$.

On a donc une suite exacte $1 \to H \approx \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to G \to G/H \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$.

S'il existe un élément $x$ d'ordre 2 dans $G$ avec $x \notin H$, alors la flèche $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ induit un isomorphisme du sous-groupe $\{1, x\}$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, si bien que la suite est scindée. $G$ est donc isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Sachant que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, deux cas sont alors possibles : soit $\rho$ est le morphisme trivial et le produit est direct (donc $G \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) ; soit $\rho$ est l'unique autre morphisme (l'identité modulo l'identification $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) et dans ce cas $G \approx D_4$.

Il reste donc le cas où $G \setminus H$ ($G$ privé de $H$) ne contient que des éléments d'ordre 4. Soit $j \in G \setminus H$ et notons $k = ij$. On a $G = H \sqcup Hj = \{1, i, i^2, i^3, j, k, i^2j, i^2k\}$. On remarque que $i^2$ est le seul élément d'ordre 2 de $G$, en particulier $i^2 = j^2 = k^2$.

Montrons que le centre $Z$ de $G$ est le sous-groupe $\{1, i^2\}$. $G$ n'est pas abélien car sinon $i^2j^2$ serait d'ordre 2, on aurait donc $i^2j^2 = i^2$ puis $j^2 = 1$ (ce qui est exclu puisque $j$ est d'ordre 4). $Z$ est donc au plus d'ordre 4. Mais si $Z$ est d'ordre 4, alors $G/Z$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (rappelons que $Z$ est distingué dans $G$). $G$ serait alors abélien : des éléments de la forme $a^kz$ où $z \in Z$ commutent deux à deux. $Z$ est donc d'ordre au plus deux. Enfin, montrons que $i^2 \in Z$ : sachant que $G$ est engendré par $i$ et $j$, il suffit de montrer que $i^2j = ji^2$ (et $i^2i = ii^2$, mais c'est évident). Comme $i^2j \in G \setminus H$, il est d'ordre 4. Ainsi $(i^2j)^2$ est d'ordre 2, on a donc $i^2ji^2j = i^2$ d'où $ji^2j = 1$. Il s'ensuit que $i^2j = ji^2 = j^{-1}$. On a bien montré que $Z = \{1, i^2\}$, on notera désormais $i^2 = -1$.

Enfin, montrons que $-ji = k$. On sait déjà que $-ji \in G \setminus H$. $-ji = j$ et $-ji = -j$ sont exclus. De même, $-ji = -k$ est exclu car on aurait $ji = ij$, donc $j \in Z$. On a donc bien $-ji = k = ij$. Il s'ensuit facilement que $jk = -kj = i$ et $ki = -ik = j$. Ceci prouve que $G \approx \mathbb{H}_8$.

$\square$

**Leçons possibles**
**103** Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
**104** Groupes finis. Exemples et applications.
(**108** Exemples de parties génératrices d'un groupe.)
**149** Groupes de petits cardinaux.

**Références**
Francinou et ses potes.