DÉVELOPPEMENT 14

UN HOMÉOMORPHISME RÉALISÉ PAR L'EXPONENTIELLE

Proposition. — *L'exponentielle de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *réalise un homéomorphisme entre* $\mathrm{Sym}(n)$ *et* $\mathrm{Sym}^{++}(n)$. *L'exponentielle de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *réalise un homéomorphisme entre* $\mathcal{H}(n)$ *et* $\mathcal{H}^{++}(n)$.

Démonstration. — On fait la preuve dans $\mathbb{C}$, celle dans $\mathbb{R}$ est analogue. Soit A hermitienne, alors il existe $U \in U(n)$ telle que

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*$$

or, pour tout k, on a

$$(U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*)^k = U \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} U^*$$

d'où

$$\exp(A) = U \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} U^*$$

donc $\exp(A)$ est hermitienne définie positive.

Si A est hermitienne définie positive alors

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*$$

avec U unitaire et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ donc la matrice hermitienne

$$B = U \begin{bmatrix} \log \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \log \lambda_n \end{bmatrix} U^*$$

vérifie $A = \exp(B)$ *i.e.* l'exponentielle est surjective de $\mathcal{H}(n)$ sur $\mathcal{H}^{++}(n)$.

Considérons maintenant H_1 et H_2 hermitiennes telles que $\exp(H_1) = \exp(H_2)$. Puisque $\exp(H_1)$ est un polynôme en H_1, la matrice H_1 commute avec $\exp(H_2)$. D'autre part, en diagonalisant H_2 puis en utilisant un polynôme tel que $P(e^\lambda) = \lambda$ pour toute valeur propre λ de H_2, on montre que H_2 est un polynôme en $\exp(H_2)$; il en résulte que H_1 et H_2 commutent donc H_1 et H_2 (qui sont diagonalisables puisque hermitiennes) sont diagonalisables dans une même base *i.e.* il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $H_1 = PD_1P^{-1}$ et $H_2 = PD_2P^{-1}$ où D_1 et D_2 sont diagonales réelles. Comme $\exp(D_1) = \exp(D_2)$ et puisque les valeurs propres de H_1 et H_2 sont réelles, il vient $D_1 = D_2$ d'où $H_1 = H_2$. Donc l'exponentielle est injective de $\mathcal{H}(n)$ dans $\mathcal{H}^{++}(n)$.

L'exponentielle étant continue, il reste à établir que sa réciproque est continue. On considère une suite $(A_p)_p$ de $\mathcal{H}^{++}(n)$ tendant vers $A \in \mathcal{H}^{++}(n)$, on note $A_p = \exp(B_p)$ et $A = \exp(B)$, il s'agit de montrer que la suite $(B_p)_p$ de $\mathcal{H}(n)$ tend vers B. On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme 2 alors la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la norme définie par $\|\!|A|\!\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$; lorsque A est hermitienne, on a donc $\|\!|A|\!\|_2 = \rho(A)$. Puisque les matrices A_p sont hermitiennes définies positives, les valeurs propres des A_p sont dans $]0, +\infty[$. D'autre part, la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers A donc est bornée mais $\|\!|A_p|\!\|_2 = \rho(A_p)$ donc les valeurs propres des A_p sont bornées ; de même, la suite $(A_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers A^{-1} donc est bornée et les valeurs propres des A_p^{-1} sont bornées. Il en résulte que les valeurs propres des matrices A_p sont contenues dans un compact de $]0, +\infty[$. En considérant l'image de ces valeurs propres par la fonction logarithme, on obtient que les valeurs propres des matrices B_p sont elles-aussi bornées. Comme $\rho(B_p) = \|\!|B_p|\!\|$, on en déduit que la suite $(B_p)_p$ est bornée. Considérons une valeur d'adhérence B_0 de la suite $(B_p)_p$, le fait que la suite $(A_p)_p$ tende vers A implique que $\exp(B_0) = \exp(B)$ et l'injectivité sur $\mathcal{H}(n)$ donne $B_0 = B$ *i.e.* la suite bornée $(B_p)_p$ n'admet que B pour valeur d'adhérence donc $(B_p)_p$ converge vers B.

Il reste à montrer que $\|\!|A|\!\|_2 = \rho(A)$ pour toute matrice hermitienne A. En fait, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice normale alors A se diagonalise en base orthonormée *i.e.* il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $Ae_k = \lambda_k e_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Considérons $X = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ avec $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1$ alors

$$\|AX\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \, |\lambda_k|^2 \leq \rho(A)^2 \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \rho(A)^2$$

donc $\|\!|A|\!\|_2 \leq \rho(A)$. Soit k tel que $\rho(A) = |\lambda_k|$ alors

$$\rho(A) = |\lambda_k| = \|Ae_k\|_2$$

d'où $\|\!|A|\!\|_2 = \rho(A)$.

$\square$

Leçons concernées

26 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie

27 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie

37 Endomorphismes diagonalisables

38 Exponentielle de matrices. Applications

Références

R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

Sébastien Pellerin