25 Décomposition de Bruhat

Théorème. *Soit k un corps et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathrm{GL}_n(k) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{T} P_\sigma \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles et P_σ la matrice de permutation associée à σ.*

Le fait que l'union soit disjointe donne en particulier l'unicité de la matrice de permutation associée à une matrice inversible donnée.

Preuve.
On commence par montrer l'existence de la décomposition. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{GL}_n(k)$. L'un au moins des coefficients de sa première colonne est non nul. Soit i_1 maximal tel que $m_{i_1 1} \neq 0$.

Pour $1 \leqslant i < i_1$, on effectue sur M l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - \frac{m_{i1}}{m_{i_1 1}} L_{i1}$. Cela revient à multiplier M à gauche par la matrice triangulaire supérieure inversible $T_{ii_1}\left(\frac{m_{i1}}{m_{i_1 1}}\right)$ (supérieure car $i_1 > i$). On a donc multiplié la matrice M par une matrice triangulaire supérieure inversible T_1 de sorte à obtenir une matrice M_1 dont tous les coefficients de la première ligne sont nuls sauf un. Quitte à multiplier (toujours à gauche) par une matrice de dilatation (triangulaire supérieure inversible), on peut supposer $m_{i1} = 1$.

On effectue ensuite les opérations élémentaires sur les colonnes $C_j \to C_j - m_{i_1 j} C_1$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$. Cela revient à multiplier M à droite par des matrices triangulaires supérieures inversibles $T_{1j}(m_{i_1 j})$. À la fin de cette étape on a obtenu une matrice $M_1' = T_1 M T_1'$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ & & & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On recommence ensuite la même méthode à partir de la deuxième colonne, et ainsi de suite. On remarque que l'indice i_1 ne sera pas utilisé, ni l'indice i_2 après la deuxième étape, etc. À la fin de l'étape $n-1$ on obtient donc une matrice de permutation $P_\sigma = TMT'$ avec T, $T' \in \mathcal{T}$, d'où la décomposition voulue $M = T^{-1} P\sigma T'^{-1}$.

Démontrons maintenant l'unicité de P_σ dans une telle décomposition. Supposons que $T_1 P_\sigma T_2 = T_3 P_\tau T_4$ avec T_1, T_2, T_3, $T_4 \in \mathcal{T}$ et $\sigma \neq \tau$. On obtient donc des matrices T, $T' \in \mathcal{T}$ telles que $P_{\sigma^{-1}} T P_\tau = T'$. Soit i tel que $\sigma(i) < \tau(i)$. Il est clair qu'un tel i existe : considérer $\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \sum_{i=1}^n \tau(i)$. Le coefficient non nul t_{ii} de T est « envoyé » en position $(\sigma(i), i)$ en multipliant T à gauche par $P_{\sigma^{-1}}$ puis en position $(\sigma(i), \tau(i))$ en multipliant à droite par τ. Comme $\sigma(i) < \tau(i)$, ce coefficient est dans la partie strictement inférieure de T', ce qui contredit le fait qu'elle soit triangulaire supérieure.

$\square$

Donnons maintenant une application à l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur les drapeaux. On rappelle qu'un drapeau est une suite de sous-espaces vectoriels emboîtés $E_0 = \{0\} \subset E_1 \subset ... \subset E_n = k^n$ telle que $\dim E_k = k \ \forall k$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux.

Proposition. *Chaque orbite de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ sous l'action de $GL_n(k)$ contient exactement un couple de la forme (I_n, P_σ) où P_σ est une matrice de permutation. En particulier, il y a $n!$ orbites.*

Preuve.
On commence par faire agir GL_n à gauche sur $\mathcal{D}$. Il est clair que cette action est transitive. On obtient donc une bijection entre le quotient de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par le stabilisateur du drapeau « canonique » (donné par $E_k = \langle e_1, ..., e_k \rangle$) et l'ensemble $\mathcal{D}$. Il est immédiat que ce stabilisateur est $\mathcal{T}$. De plus, l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur D s'identifie à celle de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur $\mathrm{GL}_n(k)/\mathcal{T}$ (par multiplication).

Soit maintenant $(A, B) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \approx \mathrm{GL}_n(k)/\mathcal{T} \times \mathrm{GL}_n(k)/\mathcal{T}$. Il est clair que $(A, B) \sim (I_n, A^{-1}B)$. On écrit alors la décomposition de Bruhat de $A^{-1}B$ soit $A^{-1}B = TP_\sigma T'$. On a donc $(A, B) \sim (I_n, TP_\sigma T') = (I_n, TP_\sigma)$ puis $(A, B) \sim (T^{-1}, P_\sigma) = (I_n, P_\sigma)$.

Reste à voir que deux tels éléments distincts ne sont pas dans la même orbite : si $(I_n, P_\sigma) \sim (I_n, P_\tau)$, il existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = I_n$ et $MP_\sigma = P_\tau$ dans $\mathrm{GL}_n(k)/\mathcal{T}$. Il existe donc T, $T' \in \mathcal{T}$ telles que $M = T$ et $MP_\sigma = P_\tau T'$. On en déduit que $P_\sigma = T^{-1} P_\tau T'$, puis $\sigma = \tau$ d'après l'unicité dans la décomposition de Bruhat.

$\square$

Leçons possibles
101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

122 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Exemples et applications.
130 Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.

Références
Francinou algèbre 1