DÉVELOPPEMENT 15

DIAGONALISABILITÉ DE L'EXPONENTIELLE DE MATRICES

Proposition. — *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique χ_A scindé alors*

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exp A \text{ diagonalisable.}$$

Démonstration. — Si A est diagonalisable alors $\exp A$ est clairement diagonalisable. Réciproquement, notons $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A alors $\exp A = \exp D \exp N$, puisque $DN = ND$. D'autre part A et D commutent donc il en est de même de $\exp(A)$ et $\exp(-D)$ or ces deux matrices sont diagonalisables donc on peut les diagonaliser dans une même base et $\exp N = \exp(-D)\exp A$ est donc aussi diagonalisable. Comme la matrice

$$\exp N = \mathrm{I}_n + N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}.$$

est unipotente, on a $\exp N = \mathrm{I}_n$ d'où

$$N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

et le polynôme

$$Q(X) = X + \frac{X^2}{2} + \cdots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$$

est annulateur pour N. Donc Q est divisible par le polynôme minimal de N qui est de la forme X^k avec $1 \leq k \leq n$ donc $\mu_N = X$ *i.e.* $N = 0$. □

Application. — Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\exp A = \mathrm{I}_n \iff A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$$

Démonstration. — Si $\exp A = \mathrm{I}_n$ alors $\exp A$ est diagonalisable donc A est diagonalisable *i.e.* on a

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

avec P inversible d'où

$$\mathrm{I}_n = \exp A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}$$

donc

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} = \mathrm{I}_n$$

i.e. $e^{\lambda_1} = \cdots = e^{\lambda_n} = 1$ donc les λ_j sont dans $2i\pi\mathbb{Z}$. La réciproque est claire. □

Application. — Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors

$$A \text{ diagonale} \iff \exp A \text{ diagonale.}$$

Démonstration. — Puisque A est diagonalisable, il existe P inversible et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels tels que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

alors

$$P^{-1}\exp(A)P = \exp(P^{-1}AP) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

et comme $\exp(A)$ est diagonale, c'est donc que

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

On pose $D = P^{-1}AP$, on a donc $\exp(D) = \exp(A)$. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé alors $A^nX = \lambda^nX$ donc X est un vecteur propre de $\exp(A)$ associé à la valeur propre e^λ, on a donc $E_\lambda \subset F_{e^\lambda}$ où E_λ et F_{e^λ} sont respectivement les sous-espaces propres de A associé à λ et de $\exp(A)$ associé à e^λ. Le lemme des noyaux donne

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(f(A))} F_\mu.$$

L'injectivité de exp sur $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ assure que pour toute valeur propre μ de $\exp A$, il existe une unique valeur propre λ de $\exp(A)$ telle que $E_\lambda \subset F_\mu$. L'égalité ci-dessus implique (à cause de la dimension) que $E_\lambda = F_{e^\lambda}$ pour toute valeur propre λ de A. Si on note E'_λ les sous-espaces propres de D, le même argument (en utilisant l'injectivité de f sur $\mathrm{Sp}(D)$) aboutit à $E_\lambda = F_{e^\lambda} = E'_\lambda$. Le fait que A et D admette les mêmes sous-espaces propres implique que $A = D$. □

Leçons concernées

20 Matrices équivalentes. Matrices semblables. Exemples et applications

23 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

24 Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

37 Endomorphismes diagonalisables

38 Exponentielle de matrices. Applications

40 Polynômes d'endomorphismes. Applications

Références

X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

Sébastien Pellerin