DÉVELOPPEMENT 16

THÉORÈME DES EXTREMA LIÉS

Proposition. — *Soit $f, g_1, \ldots, g_r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note*

$$\Gamma = \{x \in \mathcal{U} \ ; \ g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum en $a \in \Gamma$ et si $d{g_1}_a, \ldots, d{g_r}_a$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$df_a = \lambda_1 d{g_1}_a + \ldots + \lambda_r d{g_r}_a.$$

Démonstration. — On note $s = n - r$ et on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ *i.e.* on note les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r)$ et on pose $a = (\alpha, \beta)$. Notons que le résultat est trivial pour $r = n$, on suppose donc désormais $r \leq n - 1$. Le fait que $d{g_1}_a, \ldots, d{g_r}_a$ soient linéairement indépendantes signifie que la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{bmatrix}$$

est de rang r *i.e.* (quitte à changer le nom des variables) la sous-matrice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}'$ de α dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert Ω de $a = (\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\varphi : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}^r$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que (en notant $g = (g_1, \ldots, g_r)$)

$$\big(g(x, y) = 0 \ , \ x \in \mathcal{U}' \ , \ (x, y) \in \Omega\big) \iff y = \varphi(x)$$

i.e. , sur un voisinage de a, les éléments de $\Gamma = \{z; g(z) = 0\}$ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. On pose $\psi(x) = (x, \varphi(x))$ et $h(x) = f(\psi(x))$ alors (puisque $\psi(\alpha) = a$ et $\psi(x) \in \Gamma$) h admet un extremum local en α ; il s'ensuit que les dérivées partielles de h en α sont toutes nulles d'où (en notant $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) = 0$$

et pour tout k

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) = 0$$

donc dans la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{bmatrix}$$

les s premières colonnes s'expriment comme combinaison linéaire des r dernières donc cette matrice est de rang au plus r. Il s'ensuit que les $r + 1$ lignes sont liées *i.e.* il existe $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu_0 df_a + \mu_1 d{g_1}_a + \ldots + \mu_r d{g_r}_a = 0$$

mais $\mu_0 \neq 0$ puisque $d{g_1}_a, \ldots, d{g_r}_a$ sont linéairement indépendantes, il suffit donc de poser $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}$. $\square$

Application. — $\mathcal{SO}(n)$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme $\| \ \|_2$ minimale.

Démonstration. — La norme est donnée par $\|M\|_2^2 = \mathrm{Tr}\ ({}^tMM) = \sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2$ donc il s'agit de minimiser $q(M) = \mathrm{Tr}\ ({}^tMM)$ sous la contrainte $f(M) = \det M - 1$. L'application q est une forme quadratique donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tous i, j, on a $\frac{\partial q}{\partial m_{i,j}}(M) = 2m_{i,j}$ *i.e.* $\nabla q = 2M$. L'application f est polynômiale en n^2 variables donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout i, on a en développant selon la ligne i

$$\det M = \sum_{j=1}^n m_{i,j} M_{i,j}$$

où $M_{i,j}$ est le cofacteur d'indice (i, j) ; puisque $M_{i,j}$ ne dépend pas de la variable $m_{i,j}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial m_{i,j}}(M) = M_{i,j}$$

et il s'ensuit que $\nabla f = \mathrm{Com}(M)$. Notons que $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n^2}$ donc q atteint un minimum en un élément $A \in SL_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème des extrema liés, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla q(A) = \mu \nabla f(A)$ *i.e.* $2A = \mu \mathrm{Com}(A)$. Comme $\det A = 1$, on a $A^{-1} = {}^t\mathrm{Com}(A)$ d'où $2\ {}^tAA = \mu \mathrm{I}_n$ et $2^n = \mu^n$. De plus, ${}^tAA$ est symétrique définie positive donc $\det({}^tAA) > 0$ *i.e.* $\mu > 0$. Il vient donc $\mu = 2$ et ${}^tAA = \mathrm{I}_n$ *i.e.* $A \in \mathcal{SO}(n)$. Notons enfin que $\|A\|_2^2 = \mathrm{Tr}\ ({}^tAA) = n$. □

Leçon concernée

19 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

Références

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.