# DÉVELOPPEMENT 18

# MÉTHODE DE GAUSS ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX

**Proposition**. — *Soit $a < b$, $\omega : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ une application continue strictement positive et $\ell \geq 0$. Il existe une unique famille de points $a < x_0 < \cdots < x_\ell < b$ et une unique famille de réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_\ell$ tels que la méthode d'intégration donnée par*

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dt \simeq \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$$

*soit d'ordre $2\ell+1$. De plus l'erreur est donnée par*

$$E(f) = \frac{\left|f^{2\ell+2}(\xi)\right|}{(2\ell+2)!} \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2 \omega(x)dx$$

*où $\xi \in ]a,b[$ et $\pi_{\ell+1}$ est le $(\ell+1)$-è polynôme orthogonal associé au poids $\omega$.*

*Démonstration.* — On commence par montrer l'unicité. Supposons qu'il existe de tels $x_j$ et $\lambda_j$, on pose

$$\pi_{\ell+1}(t) = (t-x_0)\cdots(t-x_n).$$

Soit $P$ un polynôme de degré au plus $\ell$ alors $\deg P\pi_{\ell+1} \leq 2\ell+1$ donc

$$\int_a^b P(t)\pi_{\ell+1}(t)\omega(t)dt = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j P(x_j)\pi_{\ell+1}(x_j) = 0$$

*i.e.* $\pi_{\ell+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{\ell+1}[X]$ or $\pi_{\ell+1}$ est unitaire donc il s'agit du $(\ell+1)$-è polynôme orthogonal associé au poids $\omega$ et les $x_j$ sont donc parfaitement déterminés comme étant ses racines. Notons $L_i$ un polynôme (par exemple de Lagrange) tel que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ alors

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j L_i(x_j) = \int_a^b L_i(x)\omega(x)dx$$

et les $\lambda_i$ sont aussi uniques.

Montrons maintenant l'existence. On note $x_0, \ldots, x_\ell$ les $\ell+1$ racines (distinctes) de $\pi_{\ell+1}$ dans $]a,b[$, $L_0, \ldots, L_n$ des polynômes définis par $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ et on pose $\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\omega(x)dx$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alors le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ est $P_\ell(x) = \sum_{j=0}^{\ell} f(x_j)L_j(x)$ d'où

$$\int_a^b P_\ell(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} f(x_j) \int_a^b L_j(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j).$$

L'égalité précédente montre que la méthode est exacte si $f \in \mathbb{R}_\ell[X]$ puisque, dans ce cas, on a $f = P_\ell$. Si $f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$ alors la division euclidienne de $f$ par $\pi_{\ell+1}$ donne $f(x) = q(x)\pi_{\ell+1}(x) + r(x)$ avec $\deg q \leq \ell$ et $\deg r < \ell+1$ d'où

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \int_a^b q(x)\pi_{\ell+1}(x)\omega(x)dx + \int_a^b r(x)\omega(x)dx.$$

Mais $\pi_{\ell+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_\ell[X]$ donc $\displaystyle\int_a^b q(x)\pi_{\ell+1}(x)\omega(x)dx = 0$ et la méthode est exacte pour $r$ puisque $\deg r \leq \ell$ d'où

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j r(x_j).$$

Comme $f(x_j) = r_j$ pour tout $j$, il vient

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$$

et la méthode est donc exacte pour les polynômes de degré au plus $2\ell + 1$.

Soit $H_f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$ un polynôme vérifiant $H_f(x_i) = f(x_i)$ et $H_f'(x_i) = f'(x_i)$. On fixe $x$ dans $]a, b[$ distinct des $x_i$ et on pose $\varphi(t) = f(t) - H_f(t) - k_x(\pi_{\ell+1}(x))^2$ où $k_x$ est une constante fixée de sorte que $\varphi(x) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_x \in ]a, b[$ tel que $\varphi^{2\ell+2}(c_x) = 0$ d'où $k_x = \dfrac{f^{2\ell+2}(c_x)}{(2\ell+2)!}$ puis

$$f(x) - H_f(x) = \frac{f^{2\ell+2}(c_x)}{(2\ell+2)!}(\pi_{\ell+1}(x))^2.$$

Puisque $H_f$ est un polynôme de degré $2\ell + 1$, la méthode est exacte pour $H_f$, on a donc

$$\int_a^b H_f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j)$$

d'où

$$E(f) = \left| \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) \right| = \frac{\left|f^{2\ell+2}(c_x)\right|}{(2\ell+2)!} \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2 \omega(x)dx.$$

En particulier, on a

$$E(x \mapsto x^{2\ell+2}) = \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2 \omega(x)dx \neq 0$$

donc la méthode est d'ordre $2\ell + 1$. Enfin, on a

$$E(f) \leq \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) = \frac{\left\|f^{2\ell+2}\right\|_\infty}{(2\ell+2)!} \left\|\pi_{\ell+1}\right\|_2^2.$$

$\square$

**Leçon concernée**

36 Polynômes orthogonaux

**Références**

J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.