DÉVELOPPEMENT 19

ACTION DU GROUPE MODULAIRE SUR LE DEMI-PLAN DE POINCARÉ

On considère le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}\}$, on note $\mathcal{P}$ le demi-plan de Poincaré $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\ z > 0\}$ et on pose $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \geq 1 \ \text{ et } \ |\mathrm{Re}\ z| \leq \frac{1}{2}\}$.

Action du groupe modulaire

Définition de l'action. —
Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $z \in \mathcal{P}$, on note

$$A \star z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

On a

$$\mathrm{Im}\ (A \star z) = \mathrm{Im}\ \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathrm{Im}\ \left(\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}\ (z)$$

or $ad - bc = 1$ et $Im(z) > 0$ donc

$$\mathrm{Im}\ (A \star z) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} > 0.$$

De plus, si $B \in SL_2(\mathbb{Z})$, on a facilement $B \star (A \star z) = (BA) \star z$ pour tout $z \in \mathcal{P}$ et il est clair que $\mathrm{I}_n \star z = z$. Donc on a bien défini une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{P}$.

De plus,

$$\forall z \in \mathcal{P}, A \star z = z \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

donc $c = b = 0$ et $a = d$ or $\det A = ad = 1$ donc $A = \pm \mathrm{I}_n$. Il s'ensuit que l'action de $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}\}$ sur $\mathcal{P}$ est fidèle.

Transversale d'une action. —
On note G le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et on fait agir G sur $\mathcal{P}$ comme ci-dessus.

Si $z \in \mathcal{P}$ alors $|c|\,\mathrm{Im}\ (z) = |\mathrm{Im}\ (cz+d)| \leq |cz+d| \leq 1$ donc l'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz+d| \leq 1$ est fini. Notons $\mathcal{O}_z$ l'orbite de z et

$$I_z = \{\mathrm{Im}\ (u)\ ;\ u \in \mathcal{O}_z\} = \{\mathrm{Im}\ (A \star z)\ ;\ A \in G\}$$

mais $\mathrm{Im}\ (A \star z) = \{\frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$ si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ donc il n'y a qu'un nombre fini d'éléments $Im(u)$ de I_z vérifiant $\mathrm{Im}\ (u) \geq \mathrm{Im}\ (z)$. En particulier, il existe $A_1 \in G$ telle que $\mathrm{Im}\ (A_1 \star z)$ soit maximal dans I_z.

On note $z_1 = A_1 \star z$ et $n = E(Re(z_1) + \frac{1}{2})$. Puisque $T \star u = u + 1$, on a

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ (z_1) - n = \mathrm{Re}\ (z_1 - n) = \mathrm{Re}\ (T^{-n} \star z_1) \leq \frac{1}{2}$$

et

$$\mathrm{Im}\ (T^{-n} \star z_1) = \mathrm{Im}\ (z_1)$$

i.e. $z_2 = T^{-n} \star z_1$ est dansla bande $|\mathrm{Re}\ (u)| \leq \frac{1}{2}$ et tel que $\mathrm{Im}\ (z_2)$ soit maximal dans I_z. Il s'ensuit que $\mathrm{Im}\ (z_2) \geq \mathrm{Im}\ (S \star z_2) = \frac{\mathrm{Im}\ (z_2)}{|z_2|^2}$ d'où $|z_2| \geq 1$.

On a donc montré que toute orbite pour cette action rencontre $\mathcal{D}$.

Optimalité du domaine. —
Soit $z \in \mathcal{D}$ et $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ tels que $A \star z \in \mathcal{D}$. On commence par considérer le cas où $\mathrm{Im}\ (A \star z) \geq \mathrm{Im}\ (z)$ alors, si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on a $|cz + d|^2 \leq 1$. On a $|c|\,\mathrm{Im}\ (z) \leq 1$ donc $|c| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ *i.e.* $c = -1, 0$ ou 1.

(*i*) Si $c = 0$ alors $d = \det A = 1$ d'où (quitte à changer A en $-A$) $a = d = 1$ et $A \star z = z + b$; on a trois sous-cas :
- si $|\mathrm{Re}\ z| < \frac{1}{2}$ alors $b = 0$ *i.e.* $A = \pm \mathrm{I}_n$,
- si $\mathrm{Re}\ z = -\frac{1}{2}$ alors $b = 0$ ou 1 *i.e.* $A = \pm \mathrm{I}_n$ ou $A = T$,
- si $\mathrm{Re}\ z = \frac{1}{2}$ alors $b = 0$ ou -1 *i.e.* $A = \pm \mathrm{I}_n$ ou $A = T^{-1}$.

(*ii*) Si $c = 1$ alors $|z + d| \leq 1$ donc $d = 0$, ou $d = 1$ et $z = j$, ou $d = -1$ et $z = -\frac{1}{j}$. On distingue ces cas :
- (*iii*) si $d = 0$ alors $b = -\det A = -1$ *i.e.* $A \star z = a - \frac{1}{z}$; de plus, on a $|z| \leq 1$ donc $|z| = 1$ et $-\frac{1}{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des imaginaires purs ; $A \star z$ n'est donc dans $\mathcal{D}$ que si $a = 0$, ou $z = j$ et $a = -1$, ou $z = -\frac{1}{j}$ et $a = 1$; donc $A = S$ ou $(ST)^2$ ou TS ;
- si $d = 1$ et $z = j$, alors $a - b = \det A = 1$ donc $A \star j = \frac{aj + (a-1)}{j+1} = a + j$ qui n'est dans $\mathcal{D}$ que si $a = 0$ ou 1 *i.e.* si $A = ST$ ou TST ;
- si $d = -1$ et $z = -\frac{1}{j}$, on a de même $A = (TS)^2$ ou $T^{-1}ST^{-1}$.

1. Si $c = -1$ alors on se ramène au cas précédant en changeant A en $-A$ ce qui ne modifie pas $A \star z$.

Si $\mathrm{Im}\ (A \star z) < \mathrm{Im}\ (z) = \mathrm{Im}\ (A^{-1} \star (A \star z))$ alors, puisque z et $A \star z$ sont dans $\mathcal{D}$, on applique le même raisonnement que ci-dessus à A^{-1}.

Il résulte de l'analyse ci-dessus que z et z' de $\mathcal{D}$ sont dans la même orbite si et seulement si on est dans l'une des situations suivantes :
- $\mathrm{Re}\ z = -\frac{1}{2}$ et $z' = z + 1 = T \star z$,
- $\mathrm{Re}\ z = \frac{1}{2}$ et $z' = z - 1 = T^{-1} \star z$,
- $|z| = 1$ et $z' = -\frac{1}{z} = S \star z$.

Donc une transversale pour l'action de G sur $\mathcal{P}$ est le domaine $\mathcal{D}_0$ défini par les relations suivantes : $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z < \frac{1}{2}$ et $|z| > 1$, ou $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z \leq 0$ et $|z| = 1$.

Conséquence. —
On en déduit que les matrices S et T engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$. En effet, soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $z \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ alors $A \star z$ est sur l'orbite de z donc il existe $B \in G$ tel que $B \star (A \star z) \in \mathcal{D}$ *i.e.* on a $BA \star z \in DR$. D'après ce qui précède, cela impose que $BA = \pm \mathrm{I}_n$ *i.e.* $A = \pm B^{-1} \in G$.

Classification des réseaux

Préliminaires. —
On note $L = \{(u_1, u_2) \in (\mathbb{C}^*)^2\ ;\ \mathrm{Im}\ \frac{u_2}{u_1} > 0\}$. Un réseau est une partie $\Gamma(u_1, u_2) = \mathbb{Z}u_1 \oplus \mathbb{Z}u_2$ de $\mathbb{C}$ où (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux. On considère l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur L par

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (u_1, u_2) = (au_1 + bu_2, cu_1 + du_2).$$

Le fait qu'il s'agisse bien d'une action vient du fait que

$$A \cdot (u_1, u_2) = (u_1', u_2') \iff A \star \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1'}{u_2'}.$$

Si $\Gamma = \Gamma(u_1, u_2)$ est un réseau alors $\frac{u_1}{u_2} \notin \mathbb{R}$ donc, quitte à changer u_1 en $-u_1$, on peut supposer que $(u_1, u_2) \in L$. Cela signifie que l'application $\varphi : L \to \mathcal{R}, (u_1, u_2) \mapsto \Gamma(u_1, u_2)$ est surjective. Par ailleurs, l'application $\psi : L \to \mathcal{P}, (u_1, u_2) \mapsto \dfrac{u_1}{u_2}$ est aussi surjective.

Les identifications. —
L'ensemble $\mathcal{R}$ des réseaux s'identifie à $L/SL_2(\mathbb{Z})$ *i.e.* on a

$$\Gamma(u_1, u_2) = \Gamma(u_1', u_2') \iff \exists A \in SL_2(\mathbb{Z})/A \cdot (u_1, u_2) = (u_1', u_2').$$

En effet, l'inclusion $\Gamma(u_1', u_2') = \Gamma(u_1, u_2)$ signifie que l'on a $u_1' = au_1 + bu_2$ et $u_2' = cu_1 + du_2$ *i.e.* il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $A \cdot (u_1, u_2) = (u_1', u_2')$. Cette matrice A est en fait la matrice de passage de la $\mathbb{R}$-base (u_1, u_2) à la $\mathbb{R}$-base (u_1', u_2') donc il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $AB = BA = \mathrm{I}_n$ ce qui implique $\det A = \pm 1$. Enfin, la relation $\mathrm{Im}\ (A \star z) = \frac{\det A}{|cz+d|^2} \mathrm{Im}\ z$ conjuguée au fait que (u_1, u_2) et (u_1', u_2') soient dans L assure que $\det A = 1$. La réciproque est claire.

Le groupe $\mathbb{C}^*$ opère naturellement sur L par homothéties et la congruence modulo cette opération est précisément la congruence modulo ψ puisque

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1'}{u_2'} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^*/(u_1', u_2') = \lambda(u_1, u_2).$$

La surjectivité de ψ permet donc d'identifier PR avec $L/\mathbb{C}^*$.

Le groupe $\mathbb{C}^*$ opère naturellement sur $\mathcal{R}$ par homothéties donc on peut considérer l'application $f : \mathcal{R}/\mathbb{C}^* \to \mathcal{P}/PSL_2(\mathbb{Z})$ qui a $\Gamma(u_1, u_2)$ associe la classe de $\frac{u_1}{u_2}$ modulo $PSL_2(\mathbb{Z})$. Si $\Gamma(u_1, u_2) = \Gamma(u_1', u_2')$ alors il existe $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $(u_1', u_2') = A \cdot (u_1, u_2)$ *i.e.* $\frac{u_1'}{u_2'} = A \star \frac{u_1}{u_2}$ donc $\frac{u_1}{u_2}$ et $\frac{u_1'}{u_2'}$ sont dans la même classe modulo $PSL_2(\mathbb{Z})$. De plus, $\lambda \cdot \Gamma(u_1, u_2) = \Gamma(\lambda u_1, \lambda u_2)$ et $\frac{\lambda u_1}{\lambda u_2} = \frac{u_1}{u_2}$. Donc l'image de la classe d'un réseau par f ne dépend ni du choix du représentant du réseau, ni de la base choisie *i.e.* f est bien définie. La surjectivité de f est assurée par celle de ψ. Si $\frac{u_1}{u_2}$ et $\frac{u_1'}{u_2'}$ sont dans la même classe modulo $PSL_2(\mathbb{Z})$ alors il existe $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $(u_1', u_2') = \pm A \cdot (u_1, u_2)$ *i.e.* $\frac{u_1'}{u_2'} = \pm A \star \frac{u_1}{u_2}$ donc $\Gamma(u_1, u_2) = \Gamma(u_1', u_2')$ *i.e.* f est injective. On a donc $\boxed{\mathcal{R}/\mathbb{C}^* \sim \mathcal{P}/PSL_2(\mathbb{Z})}$.

On a vu que $\mathcal{P}/PSL_2(\mathbb{Z})$ s'identifiait à $\mathcal{D}_0$ donc on a aussi $\boxed{\mathcal{R}/\mathbb{C}^* \sim \mathcal{D}_0}$.

Leçons concernées

02 Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications
03 Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux
04 Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications
07 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications
31 Homographies de la droite complexe. Applications
32 Application des nombres complexes la géométrie
34 Utilisation des groupes en géométrie
42 Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini
43 Exemples de parties génératrices d'un groupe

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

Sébastien Pellerin