DÉVELOPPEMENT 23

THÉORÈME DE JORDAN

On considère une application T-périodique $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que g soit injective sur $[0, T[$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ et $|g'(t)| = 1$ pour tout t ; on note $\Gamma = g(\mathbb{R})$.

Lemme. — *Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \alpha$, les courbes*

$$g_\varepsilon^+(t) = g(t) + i\varepsilon g'(t) \quad et \quad g_\varepsilon^-(t) = g(t) - i\varepsilon g'(t)$$

vérifient

$$\Gamma \cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R}) = \emptyset \quad et \quad \Gamma \cap g_\varepsilon^-(\mathbb{R}) = \emptyset.$$

Démonstration. — Puisque g est de classe $\mathcal{C}^1$, g' est uniformément continue sur $[0, 2L]$ donc

$$\exists \eta > 0 \ / \ \forall s, t \in \mathbb{R}, |s - t| < \eta \Rightarrow \left|g'(s) - g'(t)\right| < 1.$$

Quitte à fixer t et à considérer la fonction définie par $h(s) = g(s) - g(t) - (s - t)g'(t)$, il découle du théorème des accroissements finis que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, |s - t| < \eta \Rightarrow \left|g(s) - g(t) - (s - t)g'(t)\right| < |s - t| \, .$$

Puisque $(s, t) \mapsto |g(s) - g(t)|$ est continue et puisque l'ensemble

$$K = [0, L]^2 \cap \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}, |s - t + nL| \geq \eta\}$$

est compact, il existe $(s_0, t_0) \in K$ tel que

$$\alpha = |g(s_0) - g(t_0)| = \inf_{(s,t) \in K} |g(s) - g(t)| \, .$$

Puisque $(s_0, t_0) \in K$, on ne peut pas avoir $s_0 = t_0 + nL$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donc $g(s_0) \neq g(t_0)$ *i.e.* $\alpha > 0$. Si $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ vérifient $|s - t + nL| \geq \eta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors on note $s' = s + kL \in [0, L]$ et $t' = t + \ell L \in [0, L]$ où $k, \ell \in \mathbb{Z}$ et on a donc aussi $|s - t + nL| \geq \eta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, il vient $|g(s) - g(t)| = |g(s') - g(t')| \geq \alpha$. On a donc

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, (\forall n \in \mathbb{Z}, |s - t + nL| \geq \eta) \Rightarrow |g(s) - g(t)| \geq \alpha > 0.$$

Supposons que $\Gamma \cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ *i.e.* il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $g(t) = g(s) + i\varepsilon g'(s)$, d'où

$$|g(t) - g(s)| = \left|i\varepsilon g'(s)\right| = \varepsilon < \alpha$$

et il résulte du choix de α qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|s - t + nL| < \eta$ donc, quitte à changer t en $t - nL$, on peut supposer que $|s - t| < \eta$. D'après le choix de η, on a donc

$$\left|-i\varepsilon g'(s) - (t - s)g'(s)\right| = \left|g(t) - g(s) - (t - s)g'(s)\right| < |t - s|$$

or $|g'(s)| = 1$ d'où $|-i\varepsilon - (t - s)| < |t - s|$, ce qui est absurde. On a donc $\Gamma \cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R}) = \emptyset$ et on obtient de même $\Gamma \cap g_\varepsilon^-(\mathbb{R}) = \emptyset$. $\square$

Théorème de Jordan. — $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ *a deux composantes connexes.*

Démonstration. — • Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$ alors $\theta(t)=|z-g(t)|^2$ est L-périodique et continue donc atteint un minimum $g(t_1)$ mais $\theta(t)=(z-g(t))(\overline{z}-\overline{g(t)})=z\overline{z}-g(t)\overline{z}-z\overline{g(t)}+g(t)\overline{g(t)}$ donc

$$\theta'(t)=-g'(t)\overline{z}-z\overline{g'(t)}+g(t)'\overline{g(t)}+g(t)\overline{g(t')}=g'(t)(\overline{g(t)}-\overline{z})+(g(t)-z)\overline{g'(t)}=2\mathrm{Re}\left(g'(t)(g(t)-z)\right)$$

d'où Re $(g'(t_1)(g(t_1)-z))=0$ *i.e.* $g'(t_1)$ et $g(t_1)-z$ sont orthogonaux.

La demi-droite $[g(t_1),z)$ contient $g(t_1)+i\varepsilon g'(t_1)$ ou $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$, par exemple $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$. Deux cas sont possibles :

– soit $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$ est sur le segment $[g(t_1),z]$ auquel cas la définition de $g(t_1)$ (comme étant le point de Γ à distance minimale de z) assure que le segment $[g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1),z]$ ne contient aucun point de Γ,
– soit z est sur le segment $[g(t_1),g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)]$ auquel cas tout point du segment $[z,g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1),z]$ est de la forme $g(t_1)-i\delta g'(t_1)$ avec $\delta<\varepsilon$ mais on a vu que $g_\delta^-(\mathbb{R})\cap\Gamma=\emptyset$ donc le segment $[z,g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)]$ ne contient aucun point de Γ.

Dans les deux cas, z peut être joint par un segment ne coupant pas Γ au point $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$ donc, en considérant l'arc $g_\varepsilon^-(\mathbb{R})$, au point $g_\varepsilon^-(0)$. Ainsi, tout point de $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$ peut être joint par un arc à $g_\varepsilon^-(\mathbb{R})$ ou $g_\varepsilon^+(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a au plus deux composantes connexes.

• Notons que $z_\varepsilon^+=g_\varepsilon^+(0)=i\varepsilon$ et $z_\varepsilon^-=g_\varepsilon^-(0)=-i\varepsilon$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^+)-\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^-)&=\frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{g'(t)}{g(t)-z_\varepsilon^+}dt-\frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{g'(t)}{g(t)-z_\varepsilon^-}dt\\&=\frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2}g'(t)\frac{2i\varepsilon}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt\\&=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt.\end{aligned}$$

On pose $a(t)=\frac{g(t)}{t}$ et $a(0)=1$ alors il existe $0<\delta<\frac{L}{2}$ tel que $\left|a(t)^2-1\right|<\frac{1}{2}$ pour tout $-\delta<t<\delta$. Comme g ne s'annule pas sur le compact $\{t;\delta\le|t|\le\frac{L}{2}\}$, on a

$$\int_{\delta\le|t|\le\frac{L}{2}}\frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\int_{\delta\le|t|\le\frac{L}{2}}\frac{g'}{g^2}\quad\text{d'où}\quad\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\delta\le|t|\le\frac{L}{2}}\frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}0.$$

D'autre part

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{|t|<\delta}\frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt=\frac{\varepsilon^2}{\pi}\int_{|u|<\frac{\delta}{\varepsilon}}\frac{g'(\varepsilon u)}{g(\varepsilon u)^2+\varepsilon^2}du=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2a(\varepsilon u)^2+1}1\!\!1_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)du$$

mais

$$\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2a(\varepsilon u)^2+1}1\!\!1_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\frac{1}{u^2+1}$$

et Re $a(\varepsilon u)^2\ge\frac{1}{2}$ pour $|u|\le\frac{\delta}{\varepsilon}$ donc

$$\left|\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2a(\varepsilon u)^2+1}1\!\!1_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)\right|\le\frac{\|g'\|_\infty}{\frac{u^2}{2}+1}$$

et cette majoration vaut aussi pour $|u|>\frac{\delta}{\varepsilon}$. Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2a(\varepsilon u)^2+1}1\!\!1_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)du\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{du}{u^2+1}=1$$

i.e. $\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^+)-\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^+)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}1$. Or la fonction $z\mapsto\mathrm{Ind}_g(z)$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus g$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ n'est pas connexe. $\square$

Leçon concernée

32 Application des nombres complexes à la géométrie

Références

S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

Première épreuve du concours d'entrée à l'École Polytechnique 1993, option M', in B. Gugger, *Problèmes corrigés de mathématiques posés au concours de Polytechnique, tome 5*, Ellipses, 1996.

Sébastien Pellerin