DÉVELOPPEMENT 25

THÉORÈME DE PASCAL

On note $\mathcal{E}$ le plan affine muni d'un repère, alors
– un triplet (x, y, z) tel que $x + y + z \neq 0$ désigne le point de coordonnées (x, y, z) dans (A, B, C),
– un triplet (x, y, z) tel que $x + y + z = 0$ désigne le vecteur $x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$.

Lemme. — *Soit $D(u, v, w)$, $D'(u', v', w')$ et $D''(u'', v'', w'')$ trois droites distinctes de $\mathcal{E}$, on note*

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = vw' + wu' + uv' - uw' - vu' - wv' \quad et \quad \delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}.$$

(i) D et D' ont un unique point en commun si et seulement si $d \neq 0$; ce point est $P(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$.

(ii) D et D' sont parallèles si et seulement si $d = 0$; la direction de D et D' est engendrée par le vecteur $V(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$.

(iii) D, D' et D'' sont parallèles ou ont un point commun unique si et seulement si $\delta = 0$.

Définition. — On dit que m est un "*point d'intersection*" de deux droites D et D' si
– soit D et D' se coupent et m est l'unique point en commun,
– soit D et D' sont parallèles et m est un vecteur non nul de leur direction commune.

Définition. — Soit (D_0, D_0'), (D_1, D_1') et (D_2, D_2') trois couples de droites (tels que les droites de deux couples ne soient jamais parallèles ou concourantes) de "*points d'intersection*" respectifs m, n et p. On dit que m, n et p sont "*alignés*" si l'une des conditions suivantes est vérifiée
– $D_0 \parallel D_0'$, $D_1 \parallel D_1'$ et $D_2 \parallel D_2'$,
– $D_i \parallel D_i'$, D_j coupe D_j', D_k coupe D_k' et la droite formée par ces deux points d'intersection est parallèle à D_i,
– ces couples sont formés de droites concourantes en des points alignés.

Lemme. — *On fixe un repère affine et on considère trois couples de droites (D_0, D_0'), (D_1, D_1') et (D_2, D_2') de "points d'intersection" respectifs $m(r, r', r'')$, $n(s, s', s'')$ et $p(t, t', t'')$. Alors m, n et p sont "alignés" si et seulement si* $\begin{vmatrix} r & r' & r'' \\ s & s' & s'' \\ t & t' & t'' \end{vmatrix} = 0.$

Démonstration. — ⋆ Si les trois couples sont formés de droites concourantes alors résultat est clair puisque p appartient à la droite (mn) si et seulement si le déterminant des coordonnées est nul.

⋆ Supposons qu'un seul couple soit formé de droites parallèles, par exemple $D_0 \parallel D_0'$, alors m est un vecteur et $n \neq p$. La nullité du déterminant ci-dessus signifie que le vecteur m dirige la droite (np).

⋆ Supposons enfin que deux couples soient formés de droites parallèles, par exemple $D_0 \parallel D'_0$ et $D_1 \parallel D'_1$, alors m et n sont des vecteurs *i.e.* $r+r'+r''=0$ et $s+s'+s''=0$, d'où

$$\begin{vmatrix} r & r' & r'' \\ s & s' & s'' \\ t & t' & t'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & r' & 0 \\ s & s' & 0 \\ t & t' & t+t'+t'' \end{vmatrix} = (t+t'+t'')\begin{vmatrix} r & r' \\ s & s' \end{vmatrix}.$$

Puisque les droites D_0, D'_0, D_1 et D'_1 ne sont pas toutes parallèles, m et n ne sont pas colinéaires donc $\begin{vmatrix} r & r' \\ s & s' \end{vmatrix} \neq 0$. La nullité du déterminant revient donc à dire que $t+t'+t''=0$ *i.e.* $D_2 \parallel D'_2$. □

Théorème de Pascal. — *Soit six points A, B, C, A', B' et C' dont trois ne sont jamais alignés. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une conique non dégénérée passe par ces six points est que les "points d'intersection" m, n et p des couples de droites (BC', CB'),(CA', AC') et (AB', BA') soient "alignés". Cette conique est alors unique.*

Démonstration. — On travaille dans le repère (A, B, C) et on note $A'(a, a', a'')$, $B'(b, b', b'')$ et $C'(c, c', c'')$.

⋆ Les coordonnées de la droite BC' sont $(c'', 0, -c)$ puisque l'équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0 \ \textit{i.e.} \ \ c''x - cz = 0.$$

Les coordonnées de la droite CB' sont $(-b', b, 0)$ puisque l'équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} = 0 \ \textit{i.e.} \ \ -b'x + by = 0.$$

Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c'' & 0 & -c \\ -b' & b & 0 \end{vmatrix} = cb + cb' + c''b$$

i.e. le "*point d'intersection*" m a pour coordonnées $(cb, cb', c''b)$.

⋆ Les coordonnées de la droite CA' sont $(-a', a, 0)$ puisque l'équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a & a' & a'' \end{vmatrix} = 0 \ \textit{i.e.} \ \ -a'x + ay = 0.$$

Les coordonnées de la droite AC' sont $(0, -c'', c')$ puisque l'équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0 \ \textit{i.e.} \ \ -c''y + c'z = 0.$$

Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a' & a & 0 \\ 0 & -c'' & c' \end{vmatrix} = ac' + a'c' + a'c''$$

i.e. le "*point d'intersection*" n a pour coordonnées $(ac', a'c', a'c'')$.

⋆ Les coordonnées de la droite AB' sont $(0, -b'', b')$ puisque l'équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} = 0 \ \textit{i.e.} \ \ -b''y + b'z = 0.$$

Les coordonnées de la droite BA' sont $(a'', 0, -a)$ puisque l'équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ a & a' & a'' \end{vmatrix} = 0 \ \textit{i.e.} \ \ a''x - az = 0.$$

Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b'' & b' \\ a'' & 0 & -a \end{vmatrix} = ab'' + a''b' + a''b''$$

i.e. le "*point d'intersection*" p a pour coordonnées $(ab'', a''b', a''b'')$.

$\star$ On considère maintenant le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} cb & cb' & c''b \\ ac' & a'c' & a'c'' \\ ab'' & a''b' & a''b'' \end{vmatrix}$$

alors m,n et p sont "*alignés*" si et seulement si $d = 0$. Puisque les points A, B, C, A', B' et C' ne sont pas alignés trois à trois, les coordonnées de A', B' et C' sont non nulles donc $s = cba'c'a''b'' \neq 0$, d'où

$$d = s \begin{vmatrix} 1 & b'/b & c''/c \\ a/a' & 1 & c''/c' \\ a/a'' & b'/b'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'a'' & b'b'' & c'c'' \\ aa'' & bb'' & cc'' \\ aa' & bb' & cc' \end{vmatrix}.$$

Les points m,n et p sont donc "*alignés*" si et seulement si le système suivant admet une solution (α, β, γ) non triviale

$$\begin{cases} a'a''X & +aa''Y & +aa'Z & = 0 \\ b'b''X & +bb''Y & +bb'Z & = 0 \\ c'c''X & +cc''Y & +cc'Z & = 0 \end{cases}$$

Le fait que m,n et p soient alignés revient donc à dire que A', B' et C' appartiennent à une courbe d'équation $2(\alpha yz + \beta xz + \gamma xy) = 0$.

$\star$ Pour conclure, on remarque que l'équation d'une conique $\mathcal{C}$ est de la forme

$$a_0x^2 + b_0y^2 + c_0z^2 + 2(a_1yz + b_1xz + c_1xy) = 0$$

donc les coniques passant par A, B et C sont données les équations du type

$$2(a_1yz + b_1xz + c_1xy) = 0.$$

On a donc bien montré que m,n et p sont alignés si et seulement s'il existe une conique passant par A, B, C, A', B' et C'.

$\star$ Puisque A', B' et C ne sont pas alignés, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & a/a' \\ b'/b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a/a' & a''/a' \\ b'/b & 1 & b''/b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a'b} \begin{vmatrix} a' & a & a'' \\ b' & b & b'' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

i.e. le système ci-dessus est de rang 2 donc les triplets (α, β, γ) solutions sont tous proportionnels *i.e.* définissent la même conique. □

Leçons concernées

22 Déterminants. Applications

25 Formes quadratiques. Applications

29 Coniques

30 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications

Compléments

Équations de droites. —

Lemme. — *Soit $D(u,v,w)$, $D'(u',v',w')$ et $D''(u'',v'',w'')$ trois droites distinctes de $\mathcal{E}$, on note*

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = vw' + wu' + uv' - uw' - vu' - wv' \quad \textit{et} \quad \delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}.$$

(*i*) *D et D' ont un unique point en commun si et seulement si $d \neq 0$;*
ce point est $P(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$.

(*ii*) *D et D' sont parallèles si et seulement si $d = 0$;*
la direction de D et D' est engendrée par le vecteur $V(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$.

(*iii*) *D, D' et D'' sont parallèles ou ont un point commun unique si et seulement si $\delta = 0$.*

Démonstration. — (*i*) Si $d \neq 0$ alors le système

$$\begin{cases} ux + & vy & wz & = 0 \\ u'x + & v'y & w'z & = 0 \\ x + & y & z & = 1 \end{cases}$$

est de Cramer donc admet pour solution unique le point $d^{-1}(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu')$ et on a bien le résultat en normalisant.

(*ii*) Si $d = 0$ alors les deux premières équations montrent que V dirige les droites D et D' (puisque ses coordonnées satisfont ces équations). De plus, le fait que $D \neq D'$ signifie que les triplets (u, v, w) et (u', v', w') ne sont pas proportionnels ce qui implique que V est non nul. On a donc bien $D \parallel D'$.

(*iii*) On a

$$\delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = u(v'w'' - v''w') + v(u''w' - w''u') + w(v''u' - u''v')$$

et on considère le triplet $(v'w'' - v''w', u''w' - w''u', v''u' - u''v')$. Alors

- si D et D' ne sont pas parallèles alors le triplet ci-dessus représente le point d'intersection de D et D' et ce dernier appartient à D'' si et seulement $\delta = 0$,
- si $D \parallel D'$ ne sont pas parallèles alors le triplet ci-dessus représente un vecteur directeur de D et D' et ce dernier dirige D'' si et seulement $\delta = 0$.

□

Référence

C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann, 2000.