DÉVELOPPEMENT 27

PROBABILITÉS QUE DEUX ENTIERS SOIENT PREMIERS ENTRE EUX

Proposition. — *La probabilité r_n que deux entiers de $\{1, \dots, n\}$ soient premiers entre eux est*

$$r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2$$

et tend vers $\frac{6}{\pi^2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration. — Soit $n \geq 1$ un entier fixé et soit $p_1, \dots, p_k$ les nombres premiers inférieurs à n. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on pose

$$U_i = \{(a, b) \in \{1, \dots, n\}^2 \ ; \ p_i \text{ divise } a \text{ et } b\}.$$

La formule du crible donne

$$\text{card} \bigcup_{i=1}^{k} U_i = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{1+\text{card } I} \text{card} \left(\bigcap_{i \in I} U_i\right).$$

Si I est une partie non vide de $\{1, \dots, k\}$ alors

$$\bigcap_{i \in I} U_i = \{(a, b) \in \{1, \dots, k\}^2 \ ; \ \forall i \in I, p_i | a \wedge b\} = \{(a, b) \in \{1, \dots, n\}^2 \ ; \ \prod_{i \in I} p_i | a \wedge b\}.$$

Or, si $1 \leq s \leq n$ est un multiple de r, alors on peut écrire $s = rt$ avec $1 \leq t \leq \frac{n}{r}$ donc il y a $E(\frac{n}{r})$ multiples de r dans $\{1, \dots, n\}$, d'où

$$\text{card} \left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = E\left(\frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}\right)^2$$

i.e.

$$\text{card} \bigcup_{i=1}^{k} U_i = - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{\text{card } I} E\left(\frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}\right)^2.$$

Notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des entiers de $\{2, \dots, n\}$ sans facteur carré. Si $d \in \mathcal{D}_n$ alors $\mu(d) = (-1)^\delta$ où δ est le nombre de facteurs carrés de d donc

$$\text{card} \bigcup_{i=1}^{k} U_i = - \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2$$

et, d'autre part, si d a un facteur carré, on a $\mu(d) = 0$ donc

$$\text{card} \bigcup_{i=1}^{k} U_i = - \sum_{d=2}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2.$$

Le nombre de couples $(a, b) \in \{1, \dots, n\}^2$ d'entiers premiers entre eux est donc

$$n^2 - \text{card} \bigcup_{i=1}^{k} U_i = n^2 + \sum_{d=2}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2 = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2$$

et on a donc

$$r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2.$$

Puisque $\frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 \sim \frac{1}{d^2}$, on considère

$$\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| = \left| \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \frac{1}{d^2} \right] \right|.$$

On a $E(\frac{n}{d}) > \frac{n}{d} - 1$ donc $E(\frac{n}{d})^2 > \frac{n^2}{d^2} - \frac{2n}{d} + 1$ *i.e.* $\frac{1}{n^2} - \frac{2}{dn} < \frac{1}{n^2} E(\frac{n}{d})^2 - \frac{1}{d^2} \leq 0$ d'où

$$\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d=1}^{n} |\mu(d)| \left| \frac{1}{n^2} - \frac{2}{dn} \right| \leq \sum_{d=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{dn} \right) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} = O\left(\frac{\log n}{n} \right)$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \sum\limits_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.

Puisque ces les deux séries sont absolument convergentes, on a

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) = \sum_{n,d} \frac{\mu(d)}{n^2 d^2} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{\ell | i} \frac{1}{i^2} \mu(\ell)$$

Il reste à calculer $S(i) = \sum\limits_{\ell | i} \mu(\ell)$. Pour $i = 1$, on a $S(1) = \mu(1) = 1$. On suppose que $i \geq 2$ et on écrit $i = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$ où les q_j sont deux à deux distincts et $\alpha_j \geq 1$ pour tout j. Un diviseur ℓ de i s'écrit alors

$$\ell = q_1^{\beta_1} \cdots q_k^{\beta_k} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$$

et la condition $\mu(\ell) \neq 0$ signifie donc que $\beta_j = 0$ ou 1 pour tout j. Ainsi, on a dans ce cas

$$\mu(\ell) = (-1)^s \text{ où } s = \text{card } \{1 \leq j \leq k \ ; \ \beta_j = 1\}.$$

On a donc une bijection entre l'ensemble des diviseurs ℓ de i tels que $\mu(\ell) = (-1)^s$ et l'ensembles des k-uplets $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \{0; 1\}^k$ dont exactement s composantes valent 1 or ce dernier ensemble compte exactement $\binom{k}{s}$ éléments, d'où

$$\sum_{\ell | i} \mu(\ell) = \sum_{s=0}^{k} \sum_{\substack{\ell | i \\ \mu(\ell) = (-1)^s}} \mu(\ell) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s = (1 + (-1))^k = 0.$$

On en déduit finalement que

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{\ell | i} \mu(\ell) = 1$$

i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

□

Leçons concernées

01 Méthodes combinatoires. Problèmes de dénombrement

10 Nombres premiers.Applications

Référence

S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 1*, Cassini, 2001.

Sébastien Pellerin