DÉVELOPPEMENT 30

SOUS-GROUPES COMPACTS DE $GL_n(\mathbb{R})$

Proposition. — *Soit E un espace euclidien de dimension N et H un sous-groupe compact de $GL(E)$. Si K est un convexe compact de E tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in H$, alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in H$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $\displaystyle\bigcap_{u \in H} \{x \in K ; u(x) = x\} \neq \emptyset$ donc, puisque K est compact et puisque $\{x \in K ; u(x) = x\}$ est fermé pour tout $u \in H$, il s'agit de montrer que si $u_1, \ldots, u_p \in H$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \{x \in K ; u_i(x) = x\} \neq \emptyset$.

On pose $v = \frac{1}{p}(u_1 + \cdots + u_p)$ alors on a $v(K) \subset K$ par convexité et puisque $u_i(K) \subset K$ pour tout $1 \leq i \leq p$. Si $x_0 \in K$ est fixé, on note $x_k = \frac{1}{k}(x_0 + v(x_0) + \cdots + v^{[k-1]}(x_0))$ alors

$$v(x_k) = \frac{1}{k}\left(v(x_0) + v^{[2]}(x_0) + \cdots + v^{[k]}(x_0)\right) = x_k - \frac{1}{k}x_0 + \frac{1}{k}v^{[k]}(x_0).$$

Puisque la suite $(x_k)_k$ est à valeurs dans le compact K, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_k$ qui converge vers un élément $a \in K$. On a alors

$$\left\|v(x_{\varphi(k)}) - x_{\varphi(k)}\right\| = \frac{1}{k}\left\|x_0 - v^{[k]}(x_0)\right\| \leq \frac{1}{k}\mathrm{diam}(K) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

or $x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} a$ et v est continue d'où $v(a) = a$.

Si $x \in K$ est fixé alors $u \in H \mapsto \|u(x)\|$ est continue sur le compact H donc on peut poser

$$\|x\|' = \sup_{u \in H} \|u(x)\|.$$

Les relations $\|\lambda x\|' = |\lambda| \, \|x\|'$ et $\|x + y\|' \leq \|x\|' + \|y\|'$ sont claires et si $\|x\|' = 0$ alors $u(x) = 0$ (*i.e.* $x \in \ker u$) pour tout $u \in H$ mais $H \subset GL(\mathbb{R}^N)$ donc $x = 0$. Donc $\| \ \|'$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$. Qui plus est, pour tout $f \in H$, on a

$$\|x\|' = \sup_{u \in H} \|u(x)\| = \sup_{(u \circ f) \in H} \|u \circ f(x)\| = \sup_{u \in H} \|u(f(x))\| = \|f(x)\|'.$$

D'autre part, on peut supposer que la norme $\| \ \|$ est la norme euclidienne. Si $\|x + y\|' = \|x\|' + \|y\|'$ alors il existe $u_0 \in H$ tel que $\|x + y\|' = \|u_0(x + y)\| = \|u_0(x) + u_0(y)\|$ (en effet, le sup est atteint en un certain $u_0 \in H$) or

$$\begin{aligned} \|x + y\|'^2 = \|u_0(x) + u_0(y)\|^2 = \|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\|u_0(x)\| \, \|u_0(y)\| \\ \leq \|x\|'^2 + \|y\|'^2 + 2\|u_0(x)\| \, \|u_0(y)\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\langle u_0(x), u_0(y)\rangle = \|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\|u_0(x)\| \, \|u_0(y)\|$$

i.e. $\langle u_0(x), u_0(y)\rangle = \|u_0(x)\| \, \|u_0(y)\|$ donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $u_0(x) = \lambda u_0(y)$ ou $u_0(y) = \lambda u_0(x)$. En composant par u_0^{-1}, on a $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

• Puisque $v(a)=a$, on a

$$\|a\|'=\|v(a)\|'=\frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1}u_k(a)+u_p(a)\right\|'\leq\frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1}u_k(a)\right\|'+\frac{1}{p}\|u_p(a)\|'\leq\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\|u_k(a)\|'=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\|a\|'=\|a\|'$$

d'où

$$\frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1}u_k(a)+u_p(a)\right\|'=\frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1}u_k(a)\right\|'+\frac{1}{p}\|u_p(a)\|'$$

et d'après le point précédent, il existe $\lambda_p\geq 0$ tel que

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}u_k(a)=\lambda_p\frac{1}{p}u_p(a)\quad\text{ou}\quad\lambda_p\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}u_k(a)=\frac{1}{p}u_p(a).$$

Le cas où $\lambda_p=0$ correspond à $a=0$ donc a est alors clairement un point fixe commun aux u_i puisque ce sont des isomorphismes. On peut donc supposer qu'il existe $\lambda_p>0$ tel que

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}u_k(a)=\lambda_p\frac{1}{p}u_p(a)$$

puis (en substituant ci-dessus)

$$\frac{\lambda_p+1}{p}\|u_p(a)\|'=\frac{1}{p}\|\lambda_p u_p(a)\|'+\frac{1}{p}\|u_p(a)\|'=\|a\|'$$

or $\|u_p(a)\|'=\|a\|'$ donc $\lambda_p=p-1$, d'où

$$v(a)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}u_k(a)+\frac{1}{p}u_p(a)=\frac{1}{p}\lambda_p u_p(a)+\frac{1}{p}u_p(a)=u_p(a).$$

Ce qui a été montré pour l'indice p peut en fait être fait pour n'importe quel indice $1\leq i\leq p$ donc on a en fait $u_i(a)=v(a)=a$ pour tout $1\leq i\leq n$. En particulier, on a bien $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p}\{x\in K; u_i(x)=x\}\neq\emptyset$. □

Proposition. — *Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$ avec $PGP^{-1}\subset\mathcal{O}(n)$.*

Démonstration. — • On considère l'application $\rho: G\to GL(\mathrm{Sym}_n), A\mapsto\rho_A$ où $\rho_A(S)={}^tASA$. Cette application est bien définie puisque ${}^tASA\in\mathrm{Sym}_n$ lorsque $S\in\mathrm{Sym}_n$ et ρ_A est inversible (d'inverse $\rho_{A^{-1}}$). L'application ρ est la composée de l'application $A\mapsto(A,A)$ et de l'application bilinéaire $(A,B)\mapsto(S\mapsto{}^tASB)$ donc ρ est continue.

• Puisque ρ est continue sur le compact G, le groupe $H=\rho(G)$ est compact. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{E}=\{{}^tMM; M\in G\}$ est compact donc (d'après le théorème de Carathéodory), son enveloppe convexe K est compacte. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont des matrices symétriques définies positives (puisque ${}^tMM$ est symétrique et, pour tout $X\in\mathbb{R}^n$ non nul, on a MX non nul, d'où ${}^tX({}^tMM)X={}^t(MX)MX=\|MX\|^2>0$) or Sym_n^{++} est convexe donc $K\subset\mathrm{Sym}_n^{++}$. Enfin, si $B\in K$, alors il existe $\alpha\in[0,1]$, ${}^tMM\in\mathcal{E}$ et ${}^tNN\in\mathcal{E}$ tels que $B=\alpha\,{}^tMM+(1-\alpha)\,{}^tNN$; considérons un élément $u\in H$, on a $u=\rho_A$ pour un certain $A\in G$, d'où

$$\begin{aligned}u(B)&=\alpha u({}^tMM)+(1-\alpha)u({}^tNN)=\alpha\rho_A({}^tMM)+(1-\alpha)\rho_A({}^tNN)\\&=\alpha\,{}^tA({}^tMM)A+(1-\alpha)\,{}^tA({}^tNN)A=\alpha\,{}^t(MA)MA+(1-\alpha)\,{}^t(NA)NA\end{aligned}$$

or $A\in G$ donc $MA, NA\in G$ donc $u(B)\in K$. On a donc montré que H est un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^N)$ (où N est la dimension de Sym_n^{++}) et K est un compact convexe de $\mathrm{Sym}_n^{++}\simeq\mathbb{R}^N$ qui est stable par tous les éléments de H. D'après la proposition précédente, il existe $S\in K$ tel que $u(S)=S$ pout tout $u\in H$ *i.e.* $\rho_A(S)=S$ pour tout $A\in G$, ce qui signifie que ${}^tASA=S$ pour tout $A\in G$.

• Enfin, la matrice $S\in K$ est symétrique définie positive donc il en est de même de la matrice S^{-1} ; il s'ensuit que S^{-1} admet une racine carrée symétrique définie positive *i.e.* il existe une matrice R symétrique définie positive telle que $S=R^2={}^tRR$. Pour tout $A\in G$, la relation ${}^tASA=S$ s'écrit donc ${}^tA\,{}^tRRA={}^tRR$ *i.e.* ${}^tR^{-1}\,{}^tA\,{}^tRRAR^{-1}=\mathrm{I}_n$ d'où ${}^t(RAR^{-1})RAR^{-1}=\mathrm{I}_n$ *i.e.* $RAR^{-1}\in\mathcal{O}(n)$. □

Leçons concernées

07 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications

19 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

20 Matrices équivalentes. Matrices semblables. Exemples et applications

26 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie

27 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie

30 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications

34 Utilisation des groupes en géomtrie

41 Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.