DÉVELOPPEMENT 33

SUR L'ELLIPSE DE STEINER

On note $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien et ABC un triangle non applati et non équilatéral. On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où O est le centre de gravité du triangle ABC. On note respectivement a, b, c les affixes de A, B, C et on note I, J, K le points respectivement d'affixes $1, j, j^2$.

Lemme. — *Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ tels que les images des points I, J, K par l'application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ associée à la transformation $\varphi : z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$ sont respectivement A, B, C.*

Démonstration. — On cherche α et β tels que $\varphi(1) = a$, $\varphi(j) = b$ et $\varphi(j^2) = c$ *i.e.* tels que $\alpha + \beta = a$, $\alpha j + \beta j^2 = b$ et $\alpha j^2 + \beta j = c$. Il s'agit d'un système de trois équations à deux inconnues donc ces équations doivent être liées *i.e.* le déterminant de ce système doit être nul or

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ j & j^2 & b \\ j^2 & j & c \end{vmatrix} = (a+b+c)(j^2 - j)$$

or $a+b+c = 0$ puisque O est le centre de gravité de ABC. D'autre part, ce système est de rang 2 puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j & j^2 \end{vmatrix} \neq$. Donc il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant les conditions ci-dessus. Par ailleurs, si $\alpha = 0$ alors le triangle ABC se déduit du triangle équilatéral IJK par la similitude indirecte associée à $z \mapsto \beta \bar{z}$ donc est équilatéral ce qui est exclus. On a donc $\alpha \neq 0$ et on obtient de même $\beta \neq 0$. $\square$

Proposition. — *Les affixes des foyers de l'ellipse de Steiner de ABC sont les deux racines carrées de $\alpha\beta$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{C}$ est le cercle de Steiner du triangle équilatéral IJK alors $f(\mathcal{C})$ est l'ellipse de Steiner du triangle ABC puisque f est une transformation affine (par construction, ou par unicité de l'ellipse de Steiner). Or $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle IJK donc est le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ *i.e.* $M \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe t tel que l'affixe de M dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ soit $z = \frac{1}{2}e^{it}$. ou encore, $M' = f(M) \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe t tel que l'affixe de M' dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ soit $z' = \frac{1}{2}(\alpha e^{it} + \beta e^{-it})$.

On note $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, $\beta = |\beta| e^{i\omega}$, $\vec{u}_1$ le vecteur d'affixe $e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$ et $\vec{v}_1$ le vecteur d'affixe $ie^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$ alors, $M' = f(M) \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe t tel que l'affixe de M' dans $(O, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ soit $z_1' = z' e^{-i\frac{\theta+\omega}{2}}$. Or on a

$$z_1' = z' e^{i\frac{\theta+\omega}{2}} = \frac{1}{2}(\alpha e^{it} + \beta e^{-it}) e^{-i\frac{\theta+\omega}{2}} = \frac{1}{2}(|\alpha| e^{i(\theta+t)} + |\beta| e^{i(\omega-t)}) e^{-i\frac{\theta+\omega}{2}}$$

i.e.

$$z_1' = \frac{1}{2}(|\alpha| e^{i\frac{\theta-\omega}{2} - it} + |\beta| e^{-i\frac{\theta-\omega}{2} - it}).$$

Donc une représentation paramétrique de $\mathcal{S}$ dans le repère $(O, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ est

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}(|\alpha| + |\beta|) \cos\left(\frac{\theta-\omega}{2} + t\right) \\ y_1' = \frac{1}{2}(|\alpha| - |\beta|) \sin\left(\frac{\theta-\omega}{2} + t\right) \end{cases}$$

et une équation de $\mathcal{S}$ dans ce repère est donc

$$\frac{{x'_1}^2}{(|\alpha|+|\beta|)^2}+\frac{{y'_1}^2}{(|\alpha|-|\beta|)^2}=1.$$

Les foyers F et F' de $\mathcal{S}$ appartiennent à l'axe $(O;\vec{u}_1)$, un argument de l'affixe de F est donc $\frac{\theta+\omega}{2}$ et on a

$$|OF|^2=|OF'|^2=\frac{(|\alpha|+|\beta|)^2}{4}-\frac{(|\alpha|-|\beta|)^2}{4}=|\alpha\beta|$$

donc les affixes de F et F' sont $\pm\sqrt{|\alpha\beta|}e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$ *i.e.* les deux racines carrées de $\alpha\beta$. □

Application. — Si $Q(X)=(X-a)(X-b)(X-c)$ alors les racines de Q' sont les affixes des foyers de l'ellipse de Steiner du triangle ABC.

Démonstration. — On a (puisque $1+j+j^2=0$)

$$ab+bc+ca=(\alpha+\beta)(\alpha j+\beta j^2)+(\alpha j+\beta j^2)(\alpha j^2+\beta j)+(\alpha j^2+\beta j)(\alpha+\beta)=-3\alpha\beta$$

donc

$$Q(X)=(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc=X^3-3\alpha\beta X-abc$$

d'où

$$Q'(X)=3X^2-3\alpha\beta$$

i.e. les racines de Q' sont les racines de $X^2-\alpha\beta$ *i.e.* sont les racines carrées de $\alpha\beta$. □

Leçons concernées

17 Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications

29 Coniques

32 Application des nombres complexes la géomtrie

33 Utilisation des angles en géométrie

44 Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 et 3

Référence

Deuxième composition du CAPES externe 1990.