DÉVELOPPEMENT 1

APPLICATION DE LA FORMULE D'EULER-MACLAURIN

Formule d'Euler-MacLaurin. — *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$ *et* $2r+1 \leq k$ *alors*

$$f(m) + \cdots + f(n) = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) + \sum_{h=1}^{r} (-1)^{h-1} \frac{B_h}{(2h)!} \left(f^{(2h-1)}(n) - f^{(2h-1)}(m) \right) + R_r$$

où

$$R_r = \frac{1}{(2r+1)!} \int_0^1 b_{2r+1}(t) f^{(2r+1)}(t)dt$$

et B_n *et* b_h *désignent respectivement les nombres et les polynômes de Bernoulli.*

Lemme. — *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *à décroissance rapide et* $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$*, on pose*

$$S_\lambda(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} f((n+\lambda)u)$$

alors quand u *tend vers* 0*, on a*

$$uS_\lambda(u) = \int_{\lambda u}^{+\infty} f(t)dt + \frac{u}{2} f(\lambda u) + \sum_{h=1}^{r} (-1)^h u^{2h} \frac{B_h}{(2h)!} f^{(2h-1)}(\lambda u) + O(u^{2h+2}).$$

Démonstration. — Puisque $x^2 f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour x assez grand. il s'ensuit que $|f((n+\lambda)u)|$ est majoré par $\frac{M}{(n+\lambda)^2 u^2}$, pour n assez grand, qui est le terme général d'une série convergente. Donc $S_\lambda(u)$ converge absolument.

On pose $\varphi(x) = f((x+\lambda)u)$ alors $\varphi^{(n)}(x) = u^n f^{(n)}((x+\lambda)u)$ et la formule d'Euler-MacLaurin donne

$$\varphi(0) + \cdots + \varphi(n) = \int_0^n \varphi(t)dt + \frac{1}{2}(f(\lambda u) + f((n+\lambda)u))$$
$$+ \sum_{h=1}^{r} (-1)^{h-1} u^{2h-1} \frac{B_h}{(2h)!} \left(f^{(2h-1)}((n+\lambda)u) + f^{(2h-1)}(\lambda u) \right) + R_r$$

où

$$R_r(\lambda, u) = \frac{1}{(2r+1)!} \int_0^1 b_{2r+1}(t) u^{2r+1} f^{(2r+1)}((t+\lambda)u)dt.$$

Or $\displaystyle\int_0^n \varphi(x)dx = \frac{1}{u} \int_{\lambda u}^{nu+\lambda u} f(t)dt$ donc

$$\varphi(0) + \cdots + \varphi(n) = \frac{1}{u} \int_{\lambda u}^{nu+\lambda u} f(t)dt + \frac{1}{2}(f(\lambda u) + f((n+\lambda)u))$$
$$+ \sum_{h=1}^{r} (-1)^{h-1} u^{2h-1} \frac{B_h}{(2h)!} \left(f^{(2h-1)}((n+\lambda)u) + f^{(2h-1)}(\lambda u) \right) + R_r$$

et en faisant tendre n vers l'infini, il vient

$$S_\lambda(u) = \frac{1}{u}\int_{\lambda u}^{+\infty} f(t)dt + \frac{1}{2}f(\lambda u) + \sum_{h=1}^{r}(-1)^{h-1}u^{2h-1}\frac{B_h}{(2h)!}f^{(2h-1)}(\lambda u) + R_r.$$

Or pour tout $t \in [0,1]$, on a $|b_{2r+1}(t)| \leq (r+\frac{1}{2})B_r$ donc

$$|R_r(\lambda,u)| = \frac{B_r}{2(2r+1)!}u^{2r+1}\int_{\lambda u}^{+\infty}\left|f^{(2r+1)}(t)\right|dt$$

i.e. $R_r(\lambda,u) = O(u^{2r+1})$ et on a le résultat souhaité en multipliant par u. □

Application. — Soit $a,b,c,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ avec $a>0$. Si $|x|<1$ alors la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{an^2+bn+c}(1-x^{\alpha n+\beta})$$

converge et tend vers $\frac{\alpha}{2a}$ lorsque $x \to 1^-$.

Démonstration. — Pour n assez grand, on a $an^2+bn+c > n$ et $an^2+(b+\alpha)n+c+\beta > n$ *i.e.* $\left|x^{an^2+bn+c}(1-x^{\alpha n+\beta})\right| \leq 2x^n$ dès que $|x|<1$ donc la série converge. Pour $0<x<1$, on note $x=e^{-u^2}$ alors

$$x^{an^2+bn+c} = \exp\left(-a\left(n+\frac{b}{2a}\right)^2u^2\right)\exp\left(\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)u^2\right)$$

de sorte que l'on obtient une expression de la forme

$$f(x) = x^{h_1}S_{b/2a}(u) - x^{h_2}S_{(b+\alpha)/2a}(u).$$

Si on pose $\varphi(u)=e^{-au^2}$ alors le lemme donne

$$uf(x) = x^{h_1}\int_{bu/2a}^{+\infty}\varphi(t)dt - x^{h_2}\int_{(b+\alpha)u/2a}^{+\infty}\varphi(t)dt + x^{h_1}u\varphi(bu/2a) - x^{h_2}u\varphi((b+\alpha)u/2a) + O(u^2)$$

or $x^{h_1} = 1+O(u^2)$ et $x^{h_2}=1+O(u^2)$ pour $u \to 0$ donc

$$f(x) = \frac{1}{u}\int_{bu/2a}^{(b+\alpha)u/2a}\varphi(t)dt + \varphi(bu/2a) - \varphi((b+\alpha)u/2a) + O(u)$$

donc

$$f(x) \xrightarrow[u\to 0]{} \frac{\alpha}{2a}.$$

□

Leçons concernées

18 Application des formules de Taylor et des développements limités

26 Développements asymptotiques d'une fonction d'une variable réelle

32 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables

Référence

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Analyse 1*, Masson, 1997.

Sébastien Pellerin