DÉVELOPPEMENT 3

THÉORÈMES DE BROUWER ET DE SCHAUDER

Théorème de Brouwer. — *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde qu'il existe $f : B^n \to B^n$ continue sans point fixe.

• On peut supposer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, puisque B^n est compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in B^n,\ |f(x) - x| > \varepsilon.$$

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tel que

$$\forall x \in B^n,\ |f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\forall x \in B^n,\ |P(x)| \leq |P(x) - f(x)| + |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 1.$$

Si on pose $Q(x) = \dfrac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}} P(x)$ alors on a Q est polynômiale (et *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^1$) telle que $Q(B^n) \subset B^n$. Enfin, pour tout $x \in B^n$, on a

$$|Q(x) - f(x)| \leq |Q(x) - P(x)| + |P(x) - f(x)| \leq (1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}})\,|P(x)| + |P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

donc

$$|Q(x) - x| \geq |f(x) - x| - |Q(x) - f(x)| > 0$$

i.e. $Q : B^n \to B^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sans point fixe.
On suppose donc désormais que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

• Il existe une application $\varphi : B^n \to S^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$. telle que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in S^{n-1}$. En effet, on note $\varphi(x)$ le point d'intersection de S^{n-1} avec la demi-droite $[f(x), x)$ *i.e.* on a $\varphi(x) \in S^{n-1}$ et $\varphi(x) - f(x) = \lambda(x)\,(x - f(x))$ avec $\lambda(x) \geq 1$. Ainsi $\|f(x) + \lambda(x)\,(x - f(x))\|^2 = 1$ *i.e.*

$$\|f(x)\|^2 + 2\lambda(x)\langle f(x), x - f(x)\rangle + \lambda(x)^2\,\|x - f(x)\|^2 = 1$$

donc

$$\lambda(x) = \frac{-\langle f(x), x - f(x)\rangle + \sqrt{\Delta'}}{\|x - f(x)\|^2}$$

(on considère la racine ≥ 1) avec

$$\Delta' = \langle f(x), x - f(x)\rangle^2 + \|x - f(x)\|^2\left(1 - \|f(x)\|^2\right) \geq 0.$$

Donc λ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur B^n et l'application φ est donc aussi de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x \in B^n$, on a $\|\varphi(x)\| = 1$. Enfin, si $x \in S^{n-1}$ alors $\lambda(x) = 1$ donc $\varphi(x) = x$.

• Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in B^n$, on pose

$$\varphi_t(x) = (1-t)x + t\varphi(x) \quad \text{et} \quad P(t) = \int_{\overset{\circ}{B^n}} \det J_{\varphi_t}(x)dm(x).$$

Alors P est une application polynômiale en t.

• Pour tout $x \in B^n$, on a $\|\varphi(x)\|^2 = 1$ d'où $\langle \varphi(x), d\varphi_x(h)\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Donc Im $d\varphi_x \subset \varphi(x)^\perp$ donc $\dim \mathrm{Im}\, d\varphi_x \leq n-1$ et, en particulier, $d\varphi_x$ n'est pas inversible *i.e.* $\det J_\varphi(x) = 0$. Comme $\varphi = \varphi_1$, cela signifie que $P(1) = 0$.

• Soit $t \in [0,1]$ et $x, y \in B^n$ tels que $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$ alors

$$(1-t)\|x-y\| = t\|\varphi(x) - \varphi(y)\|.$$

Puisque φ est de classe C^1, on peut poser $M = \sup_{x\in B^n} \|d\varphi_x\|$ et le théorème de la moyenne donne

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M\|x-y\|$$

i.e. lorsque $t \neq 1$

$$\|x-y\| \leq \frac{Mt}{1-t}\|x-y\|.$$

Si $\alpha = \dfrac{1}{1+M}$ et si $0 < t < \alpha$ alors $\dfrac{Mt}{1-t} < 1$ et on obtient une contradiction sauf si $x = y$. Ainsi, φ_t est injective pour $0 < t < \alpha$.

• Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in S^{n-1}$, on a $\varphi_t(x) = x$. Pour $0 < t < \alpha$, l'injectivité de φ_t implique donc que $\varphi_t(\overset{\circ}{B^n}) \subset \overset{\circ}{B^n}$.

• Puisque $\varphi_t(x) = (1-t)x + t\varphi(x)$, on a

$$\det J_{\varphi_t}(x) = a_n(x)t^n + \cdots + a_1(x)t + 1 = t(a_n(x)t^{n-1} + \cdots + a_1(x)) + 1$$

où les a_i sont des fonctions continues sur B_n. On pose

$$m = \sup_{\substack{x\in B^n\\ t\in[0,1]}} \left|a_n(x)t^{n-1} + \cdots + a_1(x)\right|$$

alors pour $t < \frac{1}{m}$ et tout $x \in B^n$, il vient $|a_n(x)t^n + \cdots + a_1(x)t| < 1$ d'où

$$\det J_{\varphi_t}(x) > 0$$

donc, pour $0 < t < \inf(\alpha, \frac{1}{m})$, φ_t est un difféomorphisme de $\overset{\circ}{B^n}$ sur l'ouvert $\varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$ qui vérifie en outre $\det J_{\varphi_t}(x) > 0$.

• Si $y \notin \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$ alors $\|y\| < 1$ puisque $\varphi_t(x) = x$ pour tout $x \in S^{n-1}$. Soit $x \in \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$; puisque $\varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$ est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $\mathbb{B}(x,\eta) \subset \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$ donc

$$\theta_0 = \sup\{\theta \in [0,1]\ ;\ \theta y + (1-\theta)x \in \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})\} > 0.$$

et, pour la même raison, $\theta_0 y + (1-\theta_0)x \notin \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$. Soit $(\theta_p)_p$ une suite croissante tendant vers θ_0, on note

$$b_p = \theta_p y + (1-\theta_p)x = \varphi_t(y_p) \ \text{ avec } y_p \in \overset{\circ}{B^n}.$$

Puisque B^n est compact, il existe une sous-suite $(y_{\sigma(p)})_p$ qui tend vers $y_0 \in B^n$. En passant à la limite et par continuité de φ_t, il vient $\varphi_t(y_0) = \theta_0 y + (1-\theta_0)x$. Puisque $\theta_0 y + (1-\theta_0)x \notin \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$, on a $\|y_0\| = 1$ mais φ_t est l'identité sur S^{n-1} donc $\|\theta_0 y + (1-\theta_0)x\| = 1$. Il en résulte que $\|y\| = 1$ *i.e.* on a une contradiction.

• Enfin, pour t petit, on a par la formule de changement de variables

$$P(t) = \int_{\overset{\circ}{B^n}} \det J_{\varphi_t}(x)dm(x) = \int_{\overset{\circ}{B^n}} |\det J_{\varphi_t}(x)|\, dm(x) = \int_{\varphi_t(\overset{\circ}{B^n})} dm = \int_{\overset{\circ}{B^n}} dm$$

i.e. $P(t)$ est une fonction polynômiale qui est constante égale au volume de B^n pour t petit. Donc P est constante or $P(1) = 0$ donc on obtient que le volume de B^n est nul ce qui est absurde. □

Corollaire. — *Toute application continue $f : C \to C$, où C est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, admet un point fixe.*

Démonstration. — Il existe $R > 0$ tel que $C \subset \overline{\mathbb{B}}(0, R)$. Puisque C est un convexe compact, il existe une projection $\pi : \overline{\mathbb{B}}(0, R) \to C$. On note i l'injection de C dans $\overline{\mathbb{B}}(0, R)$, alors l'application $i \circ f \circ \pi : \overline{\mathbb{B}}(0, R) \to \overline{\mathbb{B}}(0, R)$ est continue donc il existe $x \in \overline{\mathbb{B}}(0, R)$ tel que $(i \circ f \circ \pi)(x) = x$ *i.e.* $f(\pi(x)) = x$. Comme f est à valeurs dans C, on a donc $x \in C$ *i.e.* $x = \pi(x)$ et f admet donc bien un point fixe. □

Théorème de Schauder. — *Toute application continue $f : C \to C$, où C est un convexe compact d'un espace de Banach E, admet un point fixe.*

Démonstration. — • Soit $\varepsilon > 0$, on recouvre C par des boules $\mathbb{B}(y_1, \varepsilon), \ldots, \mathbb{B}(y_p, \varepsilon)$ et on note F le sous-espace $\langle y_1, \ldots, y_p \rangle$. D'après le théorème de partition de l'unité, il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ($\varphi_i : \overline{\mathbb{B}(y_i, \varepsilon)} \to \mathbb{R}^+$) telles que $\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_p(x) = 1$ pour tout $x \in C$. On définit alors $\pi_\varepsilon : C \to F_\varepsilon$ par

$$\pi_\varepsilon(x) = \varphi_1(x)y_1 + \cdots + \varphi_p(x)y_p$$

et en fait π_ε est à valeurs dans $C \cap F_\varepsilon$ puisque $\pi_\varepsilon(x)$ est combinaison convexe de points de C. L'application π_ε est continue puisque les φ_i sont continues. Enfin, pour tout $x \in C$, on a

$$\|\pi_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)y_i - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)(y_i - x) \right\|$$

or $\varphi_i(x) = 0$ pour $x \notin \overline{\mathbb{B}}(y_i, \varepsilon)$ donc $\varphi_i(x) \|y_i - x\| \leq \varepsilon \varphi_i(x)$ pour tout $1 \leq i \leq p$ et tout $x \in C$, d'où

$$\|\pi_\varepsilon(x) - x\| \leq \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x) \|y_i - x\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x) = \varepsilon.$$

• Pour tout $\varepsilon > 0$, on note i_ε l'injection de $F_\varepsilon \cap C$ (qui est un convexe compact de dimension finie) dans C alors on peut appliquer le corollaire précédent à $\pi_\varepsilon \circ f \circ i_\varepsilon$ donc il existe $x_\varepsilon \in F_\varepsilon \cap C$ tel que $(\pi_\varepsilon \circ f \circ i_\varepsilon)(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$ donc

$$\|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| = \|\pi_\varepsilon((f \circ i_\varepsilon)(x_\varepsilon)) - (f \circ i_\varepsilon)(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in C$ tel que $\|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$ et comme C est compact, on en déduit qu'il existe une suite $(x_k)_k$ de C qui converge vers un point $x \in C$ et qui vérifie $\|x_k - f(x_k)\| \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 1$. Par continuité de f, il vient donc $f(x) = x$. □

Leçons concernées

03 Utilisation de la notion de compacité

06 Utilisation de théorèmes de point fixe

11 Utilisation de la dimension finie en analyse

12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie ou infinie

14 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites

15 Différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

48 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples

Compléments

Le théorème de Cauchy-Peano. —

Théorème. — *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$ et $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors le problème de Cauchy*

$$X' = f(t, X) \quad \text{et} \quad X(t_0) = x_0$$

admet au moins une solution locale.

Démonstration. — Soit $r, M > 0$ tels que

$$\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset \mathcal{U}\ ,\ \ J = [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \subset I \ \text{ et } \sup_{(t,x)\in J\times\overline{\mathbb{B}}(x_0,r)} \|f(t,x)\| \leq M.$$

On note alors

$$\mathcal{A} = \{f : J \to \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)\ M-\text{lipschitzienne avec } f(t_0) = x_0\}$$

et pour $x \in \mathcal{A}$ et $t \in J$

$$\widehat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Le problème de Cauchy revient à trouver une solution locale de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

i.e. à chercher un point fixe de l'opérateur

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, x \mapsto \widehat{x}.$$

Si $x \in \mathcal{A}$ et $t \in J$ alors

$$\|\widehat{x}(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right\| \leq M\,|t - t_0| < r$$

et si $u, v \in J$ alors

$$\|\widehat{x}(u) - \widehat{x}(v)\| = \left\| \int_{u}^{v} f(s, x(s))ds \right\| \leq M\,|v - u|$$

donc $\widehat{x} \in \mathcal{A}$ *i.e.* l'opérateur T est bien défini. On vérifie aisément que $\mathcal{A}$ est convexe et, au moyen du théorème d'Ascoli, on vérifie que $\mathcal{A}$ est compact. Il reste donc à montrer que T est continu. Soit $x, y \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$, puisque f est uniformément continue sur $J \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x - y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \frac{\varepsilon}{r}.$$

On en déduit que si $\|x - y\| \leq \eta$ on a alors

$$\|\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\, ds \leq \varepsilon$$

i.e. T est continu. □

Champ rentrant dans la sphère. —

Théorème. — *Si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application continue telle que $\langle x, V(x)\rangle < 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ alors V s'annule en au moins un point de la boule unité.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$, on considère l'application continue

$$f_\varepsilon : \overline{\mathbb{B}}(0,1) \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x + \varepsilon V(x)$$

alors

$$\|f_\varepsilon(x)\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon^2 \|V(x)\|^2 + 2\varepsilon\langle x, V(x)\rangle.$$

Puisque le champ V est continu sur la boule unité fermée, on peut considérer le maximum de sa norme d'où

$$\|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \varepsilon^2 \|V\|^2_{\overline{\mathbb{B}}(0,1)} + 2\varepsilon\langle x, V(x)\rangle.$$

L'application $x \mapsto \langle x, V(x)\rangle$ est continue sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ qui est compacte donc cette application est bornée et atteint son maximum en un point $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ donc

$$\eta = \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} \langle x, V(x)\rangle = \langle x_0, V(x_0)\rangle < 0.$$

On en déduit qu'il existe $0 < \delta_0 < 1$ tel que, en notant $C(\delta_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ 1 - \delta_0 \leq \|x\| \leq 1\}$, on ait

$$\sup_{x\in C(\delta_0)} \langle x, V(x)\rangle < \frac{\eta}{2} < 0$$

d'où

$$\sup_{x\in C(\delta_0)} \|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq 1 + \varepsilon^2 \|V\|^2_{\mathbb{B}(0,1)} + \varepsilon\eta.$$

Si ε est choisi de sorte que $0 < \varepsilon < \frac{-\eta}{\|V\|^2_{\mathbb{B}(0,1)}}$ alors on a

$$\sup_{x\in C(\delta_0)} \|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq 1.$$

D'autre part, si $\|x\| \leq 1 - \delta_0$ alors

$$\sup_{x\in\overline{\mathbb{B}}(0,1-\delta_0)} \|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq (1-\delta_0)^2 + \varepsilon^2 \|V\|^2_{\mathbb{B}(0,1)} + 2\varepsilon \|V\|_{\mathbb{B}(0,1)}\,.$$

Si ε est aussi choisi de sorte que $0 < \varepsilon < \frac{\delta_0}{4\|V\|_{\mathbb{B}(0,1)}}$ alors on a

$$\sup_{x\in\overline{\mathbb{B}}(0,1-\delta_0)} \|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq 1.$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$ choisi assez petit, on a

$$f_\varepsilon\left(\overline{\mathbb{B}}(0,1)\right) \subset \overline{\mathbb{B}}(0,1).$$

D'après le théorème de Brouwer, l'application f_ε admet un point fixe *i.e.* il existe $y_0 \in \overline{\mathbb{B}}(0,1)$ tel que $f_\varepsilon(y_0) = y_0$ donc $y_0 + \varepsilon V(y_0) = y_0$ et il s'ensuit que $V(y_0) = 0$. □

Une application géométrique. —

Théorème. — *Soit Δ un triangle du plan de sommets a, b et c. Si Δ est la réunion de trois fermés F_a contenant $[a, b]$, F_b contenant $[b, c]$ et F_c contenant $[c, a]$, alors F_a, F_b et F_c ont un point en commun.*

Démonstration. — On identifie le plan à la droite complexe. Si F_a, F_b et F_c n'ont pas de point en commun alors les réels $d(h, F_a), d(h, F_b)$ et $d(h, F_c)$ ne sont pas tous nuls donc, à tout point h, on peut associer le barycentre $g = \phi(h)$ des points a, b et c munis respectivement des poids $d(h, F_a), d(h, F_b)$ et $d(h, F_c)$. Ces poids étant tous positifs, on définit ainsi une application continue

$$\phi : \Delta \to \Delta, h \mapsto \phi(h) = g.$$

Puisque Δ est un convexe compact du plan, l'application ϕ admet un point fixe h_0 *i.e.* on a

$$d(h_0, F_a)(h_0 - a) + d(h_0, F_b)(h_0 - b) + d(h_0, F_c)(h_0 - c) = 0.$$

Puisque Δ est la réunion des trois fermés F_a, F_b et F_c, le point h_0 appartient à l'un de ces fermés, par exemple F_a ; on a donc $d(h_0, F_a) = 0$ d'où

$$d(h_0, F_b)(h_0 - b) + d(h_0, F_c)(h_0 - c) = 0.$$

On en déduit que h_0 appartient au segment $[b, c]$ donc, en particulier, au fermé F_b *i.e.* $d(h_0, F_b) = 0$ d'où

$$d(h_0, F_c)(h_0 - c) = 0$$

i.e. $h_0 = c$ et il s'ensuit que $h_0 \in F_c$ ce qui contredit le fait que $h_0 \in F_a \cap F_b$ et l'hypothèse de départ. □

Une application en algèbre linéaire. —

Théorème. — *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs alors $\rho(A)$ est une valeur propre associée à un vecteur propre positif.*

Démonstration. — Soit λ une valeur propre de modulo $\rho(A)$ et V un vecteur propre associé de norme 1 alors

$$\rho(A)\,|V| = |\lambda V| = |AV| \leq A\,|V|$$

(où $|X|$ désigne le vecteur dont les coodonnées sont les valeurs absoluees des coordonnées de X) donc

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \ ; \ X \geq 0 \ , \ \|X\|_1 = 1 \ , \ \rho(A)X \leq AX\}$$

est non vide. De plus, on peut supposer que $\rho(A) > 0$ (sinon le résultat est clair) d'où $AX \neq 0$ pour tout $X \in S$. On considère l'application

$$f : S \to \mathbb{R}^n, X \mapsto f(X) = \frac{AX}{\|AX\|_1}$$

alors, pour tout $X \in S$, on a $f(X) \geq 0$, $\|f(X)\|_1 = 1$ et

$$Af(X) = \frac{1}{\|AX\|_1} A^2 X \geq \frac{1}{\|AX\|_1} A(\rho(A)X) = \rho(A)f(X)$$

i.e. $f(S) \subset S$. Or f est continue et S est convexe compact donc le théorème de Brouwer implique qu'il existe $Y \in S$ vérifiant $f(Y) = Y$ *i.e.* $AY = \|AY\|_1 Y$. Comme $Y \in S$, on a $\rho(A)Y \leq AY = \|AY\|_1 Y$ mais $Y \geq 0$ donc $\rho(A) \leq \|AY\|_1$ d'où $\rho(A) = \|AY\|_1$. □

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 2è éd., 1997.

A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1999.

S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

A. Monier, Deux démonstration du théorème de Brouwer, disponible à

`www.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num4/MonierJME4/MonierJME4.html`

I. Nourdin, *Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie*, Dunod, 2001.

A. Pommellet, *Agrégation de matématiques, Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

D. Serre, *Les matrices. Théorie et pratique*, Dunod, 2001.

Sébastien Pellerin