DÉVELOPPEMENT 6

ÉTUDE NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Soit $c, f \in \mathcal{C}([0,1])$, on cherche $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

On suppose en outre que $c \geq 0$.

Soit $N \geq 1$ un entier et $h = \frac{1}{N+1}$, on définit un *maillage uniforme* de $[0,1]$ de pas h en posant $x_i = ih$ pour $0 \leq i \leq N+1$. On cherche une approximation de la solution φ aux x_i *i.e.* on cherche un vecteur $u_h \in \mathbb{R}^N$ voisin de $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_N))^t$.

Si $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$ alors la formule de Taylor-Lagrange appliquée en x_i pour $1 \leq i \leq N$ donne

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{6}\varphi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h)$$

$$\varphi(x_{i-1}) = \varphi(x_i) - h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_i) - \frac{h^3}{6}\varphi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^- h)$$

où $-1 < \theta_i^- < 0 < \theta_i^+ < 1$, d'où

$$-\varphi(x_{i+1}) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = -h^2\varphi''(x_i) - \frac{h^4}{24}\left(\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h) + \varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^- h)\right).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h) + \varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^- h) = 2\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h)$$

avec $|\theta_i| < 1$, d'où

$$-\varphi''(x_i) = \frac{-\varphi(x_{i+1}) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h).$$

Pour $1 \leq i \leq N$, on pose $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$, le fait que φ soit solution du problème s'exprime alors par (on utlise les conditions aux limites)

$$\begin{cases} \frac{-\varphi_2 + 2\varphi_1}{h^2} + c_1\varphi_1 = f_1 - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_1 + \theta_1 h) \\ \frac{-\varphi_{i+1} + 2\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h^2} + c_i\varphi_i = f_i - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h) \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ \frac{2\varphi_N - \varphi_{N-1}}{h^2} + c_N\varphi_N = f_N - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_N + \theta_N h) \end{cases}$$

i.e. on a matriciellement

$$A_h\varphi_h = b_h + \varepsilon_h(\varphi)$$

où

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 + c_1h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2 + c_2h^2 & -1 & & \\ & & & & \\ & & -1 & 2 + c_{N-1}h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2 + c_Nh^2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_h = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix}, \ b_h = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/h^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \alpha/h^2 \end{bmatrix}, \ \varepsilon_h(\varphi) = -\frac{h^2}{12} \begin{bmatrix} \varphi^{(4)}(x_1 + \theta_1 h) \\ \vdots \\ \varphi^{(4)}(x_N + \theta_N h) \end{bmatrix}.$$

Lemme. — *Si $c \geq 0$ alors la matrice A_h est inversible et $A_h^{-1} \geq 0$.*

Démonstration. — Notons que si $v \geq 0$ dès que $Av \geq 0$ alors A est inversible avec $A^{-1} \geq 0$ (la réciproque est vrai). En effet, si $Ax = 0$ alors $A(\pm x) \geq 0$ donc $\pm x \geq 0$ *i.e.* $x = 0$ et A est donc inversible. Le j-è vecteur colonne de A^{-1} est $b = A^{-1}e_j$ (où e_j est le j-è vecteur de la base canonique) mais $Ab = e_j \geq 0$ donc $b \geq 0$ et A^{-1} est donc bien positive.

Soit v tel que $A_h v \geq 0$, il s'agit de montrer que $v \geq 0$. Soit p tel que $v_p \leq v_i$ pour tout i. Si $p = 1$ alors on a

$$0 \leq (2 + c_1 h^2)v_1 - v_2 \leq (1 + c_1 h^2)v_1,$$

si $p = N$ alors on a

$$0 \leq -v_{N-1} + (2 + c_N h^2)v_N \leq (1 + c_N h^2)v_N$$

et si $2 \leq p \leq N - 1$ alors on a

$$0 \leq -v_{p-1} + (2 + c_p h^2)v_p - v_{p+1} \leq c_p h^2 v_p.$$

On a donc le résultat voulu sauf si $c_i = 0$ pour un indice $2 \leq i \leq N - 1$ mais dans ce cas on remarque ce le raisonnement ci-dessus fonctionne avec $A_h + \alpha \mathrm{Id}_N$ pour tout $\alpha > 0$, on obtient donc le résultat par continuité de l'application $\alpha \mapsto (A_h + \alpha \mathrm{Id}_N)^{-1}$. □

On note $u_h \in \mathbb{R}^n$ une solution du problème matriciel associé et on suppose que $c \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}^4([0, 1])$.

Proposition. — $\displaystyle\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \varphi(x_i)| \leq \frac{h^2}{96} \left\| \varphi^{(4)} \right\|_\infty$

Démonstration. — On a $A_h \varphi_h = b_h + \varepsilon_h(\varphi)$ et $A_h u_h = b_h$ d'où

$$\varphi_h - u_h = A_h^{-1} \varepsilon_h(\varphi) = -\frac{h^2}{12} A_h^{-1} (\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h)_{1 \leq i \leq N}$$

et il en découle

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \varphi(x_i)| \leq \frac{h^2}{12} \left\| A_h^{-1} \right\|_\infty \left\| \varphi^{(4)} \right\|_\infty.$$

On considère la matrice $A_{oh} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$ qui correspond à $c = 0$. D'après le lemme, on a $A_h^{-1} \geq 0$ et $A_{oh}^{-1} \geq 0$; de plus, on a $A_h - A_{oh} = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_N) \geq 0$ d'où

$$A_{oh}^{-1} - A_h^{-1} = A_{oh}^{-1}(A_h - A_{oh})A_h^{-1} \geq 0$$

et il s'ensuit (du fait de l'expression de la norme induite $\| \ \|_\infty$) que $\left\| A_h^{-1} \right\|_\infty \leq \left\| A_{oh}^{-1} \right\|_\infty$ d'où

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \varphi(x_i)| \leq \frac{h^2}{12} \left\| A_{oh}^{-1} \right\|_\infty \left\| \varphi^{(4)} \right\|_\infty.$$

Si $e = (1 \cdots 1)^t \in \mathbb{R}^N$ alors $\left\| A_{oh}^{-1} \right\|_\infty = \left\| A_{oh}^{-1} e \right\|_\infty$ puisque $A_{oh}^{-1} \geq 0$ mais $A_{oh}^{-1} e$ est la solution du problème discret associé au problème aux limites

$$-u''(x) = 1 \ , \ u(0) = u(1) = 0$$

dont une solution est donnée par $\psi(x) = \frac{1}{2} x(1-x)$. Comme ψ est polynômiale de degré 3, on a $\varepsilon_h(\psi) = 0$ donc $(A_{oh}^{-1} e)_i = \psi(x_i)$ pour tout i et il s'ensuit que

$$\left\| A_{oh}^{-1} e \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |\psi(t)| = \frac{1}{8}$$

d'où $\left\| A_{oh}^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{8}$ et le résultat en découle. □

Sébastien Pellerin

Leçons concernées

18 Application des formules de Taylor et des développements limités

22 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées

Référence

P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

Sébastien Pellerin