

DÉVELOPPEMENT 9

ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES ET SÉRIES GÉNÉRATRICES

Exemple. — Le nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation $x + 2y + 3z = n$ est

$$p(n) = \frac{(n+1)(n+5)}{12} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9} \cos \frac{2i\pi}{3}.$$

Démonstration. — Pour $|t| < 1$, on effectue les développements en série entière suivants :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k, \quad \frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-t^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{3k}$$

de sorte que

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^{3k} \right) = \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{\substack{n+2m+3p=d \\ n,m,p \geq 0}} t^d \right) = \sum_{d \geq 0} p(d) t^d.$$

On décompose cette fraction en éléments simples

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1}{6(1-t)^3} + \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{17}{72(1-t)} + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{1}{9(1-jt)} + \frac{1}{9(1-j^2t)}.$$

En dérivant la série géométrique, il vient

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)t^k \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-t)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2}(k+2)(k+1)t^k$$

d'où en remplaçant plus haut

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{12}(k+2)(k+1) + \frac{1}{4}(k+1) + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^k}{8} + \frac{1}{9}(e^{\frac{2i\pi k}{3}} + e^{-\frac{2i\pi k}{3}}) \right) t^k.$$

et on a donc, pour tout $k \geq 0$, $p(k) = \frac{(k+1)(k+5)}{12} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^k}{8} + \frac{2}{9} \cos \frac{2i\pi k}{3}$. □

On considère des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ premiers dans leur ensemble et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation

$$\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n.$$

Proposition. — $S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$

Démonstration. — On a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n = \prod_{\ell=1}^p \sum_{n_\ell \in \mathbb{N}} z^{\alpha_\ell n_\ell} = \prod_{\ell=1}^p \frac{1}{1 - z^{\alpha_\ell}}$$

et toutes ces séries entières admettent 1 pour rayon de convergence. La fraction rationnelle $F(z)$ a pour pôles les racines α_ℓ^{e} de l'unité pour $\ell = 1, \dots, p$. En outre, le pôle $z = 1$ est d'ordre p alors que tous les autres sont d'ordre $< p$ (puisque les α_i sont premiers dans leur ensemble). La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc sous la forme

$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + G(z)$$

où $G(z)$ est une somme finie de termes du type $\frac{a_{1,\omega}}{\omega - z} + \dots + \frac{a_{p-1,\omega}}{(\omega - z)^{p-1}}$ avec les ω racines de l'unité et les $a_{k,\omega} \in \mathbb{C}$. Pour trouver A , on écrit

$$(1-z)^p F(z) = \frac{1}{1+z+\dots+z^{\alpha_1-1}} \cdots \frac{1}{1+z+\dots+z^{\alpha_p-1}}$$

puis on fait tendre z vers 1 d'où $A = \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$. Par ailleurs en dérivant k fois, il vient

$$\frac{1}{(\omega - z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+k-1)!}{s!} \omega^{-s-k} z^s$$

et (puisque $|\omega| = 1$) le coefficient en z^n dans cette série est un $O(s^{k-1})$. D'autre part, on a

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+k-1)!}{s!} z^s = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{s=0}^{+\infty} (s+1) \cdots (s+p-1) z^s$$

d'où

$$S_n = \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \frac{(n+1) \cdots (n+p-1)}{(p-1)!} + O(n^{p-2})$$

d'où

$$S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}.$$

□

Leçon concernée

24a Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples

Références

- A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Analyse 1*, Masson, 1997.
 X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.